

УДК 372.851

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОДГОТОВКИ УЧЕНИКОВ К САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ОСУЩЕСТВЛЕНИЮ ДЕДУКТИВНЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

© Елена Михайловна РЕЗНИК

Российский государственный педагогический университет
им. А.И. Герцена, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация,
аспирант, кафедра методики обучения математике
и информатике, e-mail: elr1900@mail.ru

Обоснована необходимость подготовки учеников к сознательному освоению деятельности «дедуктивное доказательство» при изучении систематического курса геометрии. В качестве средств для решения проблемы преодоления трудностей в проведении дедуктивных обоснований в начале изучения геометрии выделены: диалог, в ходе которого ученики устанавливают всевозможные связи в изучаемом материале; специально сконструированные задания, деятельность с которыми нацеливает учеников на установление связей в геометрическом материале при изучении начальных геометрических понятий. Описана специфика заданий, деятельность с которыми способствует установлению связей в геометрическом материале (нацеленность на осуществление действий: выведение следствий, подбор условий, аргументация и переформулирование – для заданных геометрических ситуаций), требования к формулировкам таких заданий, а также рекомендации к их использованию. Представлены примеры организации деятельности с некоторыми из таких заданий на уроке. Обосновано, что в результате усвоения геометрического содержания на основе выделенных средств реализуется подготовка учащихся к успешному осуществлению дедуктивного доказательства, что является залогом самостоятельного продвижения в предмете: в решении задач систематического курса геометрии и в понимании целостности содержания геометрии.

Ключевые слова: дедуктивное обоснование; установление связей; выведение следствий; подбор условий; аргументация; переформулирование.

Современные образовательные стандарты определяют развитие личности учащегося на основе освоения универсальных способов познания мира как основную цель образования [1].

Дедуктивное доказательство является по сути познавательным, логическим универсальным учебным действием, кроме того, его усвоение влияет на формирование общеучебных действий: постановку и формулирование проблемы, действия со знаково-символическими средствами и многих других.

Известно, что изучение геометрии в наибольшей степени должно способствовать развитию умения рассуждать, причем рассуждать грамотно, обоснованно. Это обусловлено построением школьного курса геометрии как дидактически организованной проекции самой науки, основной идеей которой является идея причинно-следственной связи [2].

Однако изучение геометрии в 7–9 классах связано с рядом трудностей. С одной стороны, реальный уровень развития деятельности учеников, приступающих к изучению систематического курса геометрии

(СКГ), обусловленный предыдущим обучением, психофизиологическими и другими факторами, не соответствует требованиям, предъявляемым к нему и необходимым для успешного освоения этого курса. С другой стороны, очевидна недостаточность учебного времени для успешного овладения основной деятельностью по усвоению геометрического материала – дедуктивным обоснованием, не предваренного определенной методикой.

Это приводит к невозможности самостоятельного осуществления дедуктивного доказательства большинством учеников, потере интереса к предмету, формальному заучиванию теорем систематического курса геометрии. Следовательно, своих развивающих целей изучение геометрии не реализует, и аксиоматическое построение математики (аксиоматический метод), которое как ни на каком другом предмете прослеживается в СКГ, и которое способствует формированию мировоззрения учащихся, ускользает от детей, а деятельность детей не развивается.

Анализ научно-методической литературы показал, что ранее были предприняты попытки найти пути преодоления трудностей

учеников, приступающих к изучению СКГ. О том, что эта проблема давно занимает исследователей в области обучения математике, свидетельствуют материалы 1 съезда преподавателей математики [3]. Современные исследования в основном направлены на решение проблемы поиска средств, помогающих осуществлению детьми геометрических доказательств. Предложенные методистами средства очень ценны, но для того, чтобы их активно использовать, у учеников должна быть большая практика работы с доказательствами. Были разработаны различные способы разрешения трудностей, испытываемых учащимися в проведении дедуктивных обоснований. При изучении первых теорем систематического курса геометрии: на основе обучения доказательству через решение ряда последовательных задач [4]; на основе формирования умения осуществлять поиск доказательства и эвристических приемов [5; 6]; на основе формирования логических действий [7]; на основе психологического убеждения учеников в необходимости и важности доказательств (демонстрация зрительных иллюзий, знакомство с истинными и ложными доказательствами) и др.

Существующие методики, направленные на обучение учеников доказательству утверждений, реализуются непосредственно при изучении геометрических доказательств.

Однако анализ особенностей дедуктивного доказательства позволяет сделать вывод, что формирование готовности к самостоятельному осуществлению учениками этой деятельности можно и нужно реализовать до изучения первых доказательств СКГ.

Анализ философской и методической литературы показал, что доказательство, которое можно рассматривать как процесс и как результат, имеет следующие особенности:

- в нем содержатся определенные логические ходы, которые в процессе доказательства возникают, наделяются смыслом и актуализируются;
- для понимания и осуществления доказательства необходимо осознавать существование взаимосвязей между геометрическими фактами и действия, посредством которых эти связи устанавливаются.

В результате проведенного исследования нами была обоснована необходимость и возможность организации подготовки учеников

к самостоятельному осуществлению дедуктивных доказательств на материале начальных геометрических сведений (НГС).

Основная задача такой подготовки – нацелить учеников на установление всевозможных связей в изучаемом геометрическом материале и осознание характера этих связей.

Традиционно, как показал наш эксперимент, ученики изучают НГС как набор фактов, определений, стандартных изображений. Геометрические понятия НГС не являются новыми для детей, поэтому у них создается иллюзия «легкости» предмета. Но уже следующая глава «Треугольники» насыщена доказательствами и в теоретическом, и в задачном материале. И ученики, неподготовленные к осуществлению дедуктивного доказательства, чувствуют себя неуспешными и беспомощными.

Мы считаем, и это подтвердили результаты проведенных нами исследований, что при изучении НГС необходимо организовать такую деятельность, при осуществлении которой ученик поставлен перед необходимостью рассматривать геометрическую ситуацию «со всех сторон». То есть необходимо учить детей рассматривать объекты этой ситуации с точки зрения всевозможных связей: между заданными объектами (объект – объект, объект – изображение, объект – термин, объект – символьная запись и др.); между заданными объектами и имеющимися в субъектном опыте учеников знаниями и др. Выяснение характера установленных связей также является немаловажным.

Установлению связей в геометрическом материале способствуют ситуации, в которых ученик поставлен перед необходимостью формулировать суждения, подыскивать обоснования или опровержения для собственных суждений и суждений другого. Такие ситуации можно создать при работе с заданиями, нацеленными на выполнение различных видов переформулирования (словесно заданная формулировка – графическое изображение; графическое изображение – словесно заданная формулировка; словесно заданная формулировка – словесно заданная формулировка); выведение следствий из данного условия; отыскание возможных условий для данного следствия; осуществление обоснования и варьирования ситуации. В процессе выполнения этих действий ученики

озвучивают и оформляют свое знание так, чтобы оно могло быть понято другим человеком, а это, как известно, способствует продвижению в понимании предмета самим учеником.

Таким образом, ведущей целью изучения первого раздела становится формирование способности учеников устанавливать связи в геометрическом материале. В соответствии с этой целью видоизменяются все основные характеристики учебного процесса, т. е. его содержание (имеется в виду содержание деятельности), формы учебной активности учащихся, методы и формы ее организации, характер взаимодействия между участниками учебного процесса, особенности их общения.

Основными средствами подготовки учеников к самостоятельному осуществлению дедуктивных доказательств на материале НГС являются:

- специально организованный диалог, в ходе которого ученики устанавливают всевозможные связи в изучаемом материале;
- деятельность со сконструированными нами заданиями, нацеленная и на установление связей в геометрическом материале, и на усвоение новой для учеников терминологии и символики.

Итак, средством организации деятельности ученика и учителя выступают специально сконструированные и подобранные нами задания, которые также являются объектами изучения для ученика, позволяют ему получить новые предметные знания.

Нами установлена специфика заданий, которая заключается в следующем. Задания:

- должны побуждать детей к установлению связей в изучаемом материале, т. е. между геометрическими объектами и их свойствами, к установлению характера этих связей (случайность и закономерность, существенность и несущественность), к установлению зависимости установленных связей от изображения объектов;
- должны нацеливать на выполнение действий выведения следствий из теоретического факта и чертежа, нахождение условий для выполнения того или иного геометрического факта, для построения данного чертежа и др.

Формулировки заданий, нацеливающих учеников на установление связей в геомет-

рическом содержании, сконструированы таким образом, чтобы:

- озадачивать учеников;
- подразумевать неоднозначный ответ (что может задаваться как сутью самого задания, так и его формулировкой – неясно, нечетко заданной);
- предоставлять возможность (или необходимость) осуществления выбора;
- обуславливать необходимость приведения аргумента, подтверждающего правильность выбора;
- подразумевать возможность дополнения для конкретизации какого-либо следствия или заменены для получения новых следствий и сопоставления прежних и вновь полученных.

В конструируемых нами заданиях зачастую вопрос не задает строгого направления, а только ограничивает некоторую область возможных ответов. И поскольку большинство заданий предполагают различные варианты ответов, возможна организация диалога. Именно из-за рассогласованности ответов учеников возможно возникновение коллективного обсуждения геометрической ситуации на уроке. И именно эта рассогласованность ответов служит мотивом для приведения обосновывающих свои выводы суждений.

Очень важна организация диалога при работе с заданиями, поскольку такая форма работы соответствует подростковой мотивации (предоставляет возможности для общения, которое является ведущей деятельностью учеников подросткового возраста), а также предоставляет большие возможности для развития речи учеников и способствует взаимообогащению их геометрического опыта. Кроме того, коллективная работа с заданиями предполагает сопоставление и критическую оценку различных подходов к решению задачи, открытость для обсуждения и оценки действий и высказываний всех участников учебного процесса, а также порождает у учеников взаимный интерес к работе друг друга, побуждая к ее активному анализу и оценке.

Все вышеперечисленное создает предпосылки для самостоятельного осуществления доказательства утверждений, нацеливает детей на установление связей в дальнейшем освоении предмета. У учащихся появляется

привычка искать связи, находить их, появляется ощущение того, что все взаимосвязано.

Очевидно, что далеко не все факты, полученные при выполнении заданий, подлежат запоминанию, это не является целью деятельности. Важно, чтобы работала мысль, чтобы появилось понимание возможности существования взаимосвязи и желание найти ее.

Подобранные и сконструированные нами задания можно разделить по видам, имея в виду – задачи как средство изучения нового материала (работа с определением, актуализация знаний, подведение под понятие), закрепление изученного и т. д., т. е. введение, применение, контроль, в зависимости от их использования в процессе изучения каждого понятия или его свойства, и как средство реализации нашей цели.

В рамках данной статьи мы хотели бы представить примеры организации деятельности с некоторыми из описанных выше заданий на уроке.

Задание 1. Какие углы изображены на рисунке 1? Определите градусные меры этих углов. Постройте:

- данные углы;
- смежные с данными;
- вертикальные изображенным углам.

Что можно сказать о данных и полученных углах?

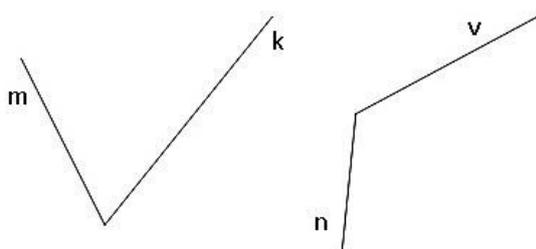


Рис. 1.

Это задание нацелено на осуществление учениками вывода следствий из геометрического факта и системы геометрических фактов (из геометрической ситуации). Деятельность с заданиями такого типа предполагает формулирование суждений для конкретных объектов (заданных графически или словесно) с последующим выдвижением гипотез (по аналогии) обо всех объектах класса, к которому принадлежит данный объект, а также поиск обоснования или опровержения для сформулированных суждений.

Предполагается следующая деятельность. Первый шаг – выполнение традиционного анализа. После – попытка обобщения полученного.

Обращаем внимание, что формулировка задания не является некорректной. Она построена таким образом, чтобы с самого начала учащиеся сами выбирали основания для своих ответов и называли их. Это очень важно, потому что таким образом достигается осознание возможности получения разных выводов из одного и того же чертежа.

Опыт показал рациональность поэтапной организации работы: первый этап – самостоятельное выполнение учащимися задания, следующий этап – коллективное обсуждение (между учащимися, учителем и учащимися).

Первое, в чем расходятся ученики – это в назывании углов. Одни из них называют углы соответственно обозначению на чертеже, другие – сразу определяя вид угла. И, естественно, первый и возможный вопрос – кто прав? Путем обсуждения ребята приходят к выводу, что правильными можно считать оба ответа. Обсуждение сводится к отысканию оснований для ответов. В частности, к подведению данных углов под понятия острого и тупого угла.

Первое ожидаемое суждение об углах, которое обычно не произносится, – данные углы не равны. Учителю целесообразно предложить ученикам сравнить данные углы.

Дальше происходит формулирование выводов, связанных с конкретным чертежом:

- угол, смежный с mk – тупой;
- угол, вертикальный mk – острый;
- угол, смежный с nv – острый;
- угол, вертикальный nv – тупой;
- смежные с данными углы не равны;
- вертикальные данным углы не равны и др.

Далее – обсуждение правильности выводов и выяснение возможных оснований для таких выводов. Учитель спрашивает ребят, как они к этому пришли и есть ли другой способ определения видов этих углов и их сравнения (в случае, когда действия детей одинаковы, что бывает крайне редко).

Следующим этапом является обобщение полученных фактов.

Если никто из учащихся сам не произнес обобщающего суждения, то учитель задает провоцирующие вопросы:

– Вася сказал, что смежные с данными углы не равны. Как вы думаете, это только с нашими углами так получилось или так происходит всегда – когда сами углы не равны?

– Давайте попробуем сформулировать суждения...

Важно обращать внимание ребят на их деятельность. Для этого учитель задает вопросы, одной из функций которых является усвоение детьми терминологии «доказательство», «следствие», «условие» и пр.:

– Что мы доказали?

– Что углы ν и $m\kappa$ не равны.

– При каком условии? Из чего мы сделали такой вывод?

– Из того, что один из углов – острый, а второй – тупой. (Из того, что у них разные градусные меры. Из того, что если их наложить друг на друга, они не совместятся.)

Выполнение такого задания предоставляет возможность выхода на теоретический факт. Целью выполнения таких заданий являются не сами по себе факты, а процесс их получения и выяснение учащимися взаимосвязи между геометрическими фактами.

Итогом выполнения этого задания является набор выведенных учащимися следствий из того, что один угол – острый, а второй – тупой.

Например:

Если один из углов острый, а второй тупой, то:

– равные им углы не равны;

– смежные с ними углы не равны;

– сами углы не равны;

– каждый из этих углов меньше развернутого угла;

– каждый из этих углов не равен прямому углу;

– при наложении эти углы не совпадают и др.

Также могут быть получены и следующие утверждения: если не дана градусная мера углов, то о градусной мере углов, смежных (вертикальных, равных) с данными, ничего сказать нельзя.

Таким образом, учащиеся приходят к границам определяемого данными фактами.

Учитель фиксирует полученные утверждения на доске и потом вместе с учащимися

выясняет, какие из них являются эквивалентными. Он задает вопрос:

– Какие из данных утверждений говорят об одном и том же разными словами?

Это тоже очень важный этап. Ребята сразу отмечают, что неравенство углов мы определяем тремя способами, и замечают, что утверждения, в которых устанавливается равенство одних и тех же углов разными способами, говорят об одном и том же. Также важно само формулирование в условной форме утверждений, обоснованных и понятных детям.

При выполнении таких заданий учащиеся устанавливают связи между геометрическими объектами, данными в задачной ситуации и всевозможными геометрическими фактами, имеющимися в их субъектном опыте. Дети, формулируя умозаключения, приводят основания, которые определяют появление выводов, а это очень важно, потому что приведение аргументации становится для них естественным, и потому что ребята осознают сам процесс получения следствий из теоретического факта.

Следующий пример задания, работа с которым реализует цели нашей методики, – задание, нацеленное на переформулирование ситуации и на словесное формулирование ситуации, заданной графически.

Задание 3. Попробуйте написать определения прямого угла, ориентируясь на представленные ниже изображения. Для этого установите, что изображено на рисунке 2 и найдите связь каждого изображенного объекта с прямым углом.

Первым этапом выполнения этого задания является обсуждение изображенных объектов. Выясняется, что это за объекты и их свойства. Потом учитель предлагает сформулировать суждения, связывающие изображенные объекты с прямым углом. К моменту выполнения этого задания ученики имеют достаточно богатый опыт в осуществлении деятельности формулирования суждений и рассмотрения объектов в их взаимосвязях, поэтому задание не представляет особой трудности для учащихся.

Выполняя задание, ученики поставлены в ситуацию необходимости поиска связей между геометрическими объектами.

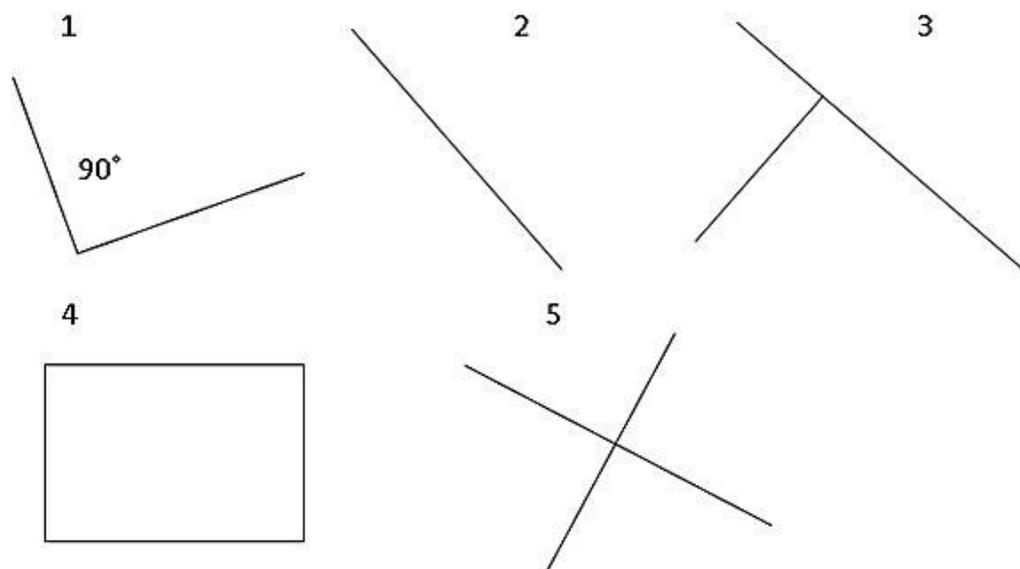


Рис. 2.

Результаты выполнения этого задания обсуждаются коллективно, таким образом, ученикам предоставляется возможность услышать суждения, отличные от сформулированных ими, а также установить правильность чужих и собственных суждений.

При реализации нашего подхода к изучению начальных геометрических сведений у учеников формируется другой взгляд на геометрическую деятельность, другое представление о том, что изучает геометрия (взаимосвязь объектов и их свойств). Это подтверждается результатами проведенного эксперимента.

Понимание существования связей между геометрическими объектами, характера этих связей и умение их устанавливать – необходимые условия для осуществления доказательства. Если сформировано умение находить связи между объектами, осознан механизм установления этих связей, развито понимание возможности установления таких связей, то ребенка можно научить решать задачи на доказательство, показав стратегии осуществления доказательства, он готов к уяснению способов дедуктивного доказательства.

Мы считаем, что только в результате осуществления целенаправленного обучения установлению связей в геометрическом материале происходит понимание учениками

взаимосвязанности и взаимообусловленности геометрических понятий и целостности геометрической теории.

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. М., 2012.
2. *Градштейн И.С.* Прямая и обратная теоремы. М., 1972.
3. Труды 1 Всероссийского съезда преподавателей математики. 27.12.1911–3.01.1912. Спб., 1913. Т. 1.
4. *Груденов Я.И.* Совершенствование работы учителя математики. М., 1990.
5. *Саранцев Г.И.* Обучение математическим доказательствам в школе. М., 2000.
6. *Кулюткин Ю.Н., Сухобская Г.С.* Развитие творческого мышления школьников. Л., 1967.
7. *Столяр А.А.* Педагогика математики. Мн., 1986.

1. Federal'nyy gosudarstvennyy obrazovatel'nyy standart osnovnogo obshchego obrazovaniya. M., 2012.
2. *Gradshyteyn I.S.* Pryanaya i obratnaya teoremy. M., 1972.
3. Trudy 1 Vserossiyskogo s"ezda prepodavateley matematiki. 27.12.1911–3.01.1912. Spb., 1913. T. 1.
4. *Grudenov Ya.I.* Sovershenstvovanie raboty uchitelya matematiki. M., 1990.

5. *Sarantsev G.I.* Obuchenie matematicheskim dokazatel'stvam v shkole. M., 2000.
6. *Kulyutkin Yu.N., Sukhobskaya G.S.* Razvitiye tvorcheskogo myshleniya shkol'nikov. L., 1967.
7. *Stolyar A.A.* Pedagogika matematiki. Mn., 1986.

Поступила в редакцию 21.04.2015 г.

UDC 372.851

METHODICAL ASPECTS OF PREPARING STUDENTS FOR INDEPENDENT IMPLEMENTATION OF DEDUCTIVE PROOF

Elena Mikhaylovna REZNIK, The Herzen State Pedagogical University of Russia, Saint-Petersburg, Russian Federation, Post-graduate Student, Methods of Teaching Mathematics and Computer Science Department, e-mail: elr1900@mail.ru

The need for preparing students to conscious development of activities of “deductive proof” in the study of a systematic course of geometry is substantiated. As means for a solution of the problem of overcoming difficulties in carrying out deductive justifications at the beginning of studying geometry, specially designed tasks activity which are aimed at pupils during establishment of communications in geometrical material when studying initial geometrical data and a dialogue in which students set all kinds of communication in the studied material and a work technique with them are presented. The specificity of tasks, activities which contribute to the establishment of relations in the geometrical material (focus on the implementation of the action: elimination of consequences, selection conditions, and the reformulation of the argument – for specific geometric situations), the requirements for the wording of such tasks, as well as recommendations for their use. The examples of organization of activity with some of such tasks at the lesson are presented. It is proved that as a result of the assimilation of geometric content based on allocated funds, is implemented to prepare students for the successful implementation of deductive proof that self-promotion is the key to the subject: solving problems in a systematic course in understanding the geometry and integrity of the contents of the geometry.

Key words: deductive justification; establishment of communications; removal of consequences; selection of conditions; argumentation; reformulation.