УДК 517.988.6 + 517.922
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1974-1982

МНОГОЗНАЧНЫЕ НАКРЫВАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ С ВЕКТОРНОЗНАЧНОЙ МЕТРИКОЙ В ИССЛЕДОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© **Е. С. Жуковский** [1), **Е. А. Плужникова** [2)]

[1)] Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: zukovskys@mail.ru
[2)] Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Понятие накрывания распространяется на многозначные отображения, действующие в пространствах с векторнозначной метрикой. Сформулировано и доказано утверждение о точках совпадения двух многозначных отображений в пространствах с векторнозначной метрикой, одно из которых является накрывающим, а другое — липшицевым. Получен признак накрывания оператора Немыцкого в пространстве измеримых существенно ограниченных вектор-функций, снабженном векторнозначной метрикой. Перечисленные результаты применяются к исследованию функциональных включений с отклоняющимся аргументом.
Ключевые слова: пространства с векторнозначной метрикой; точки совпадения; многозначные накрывающие отображения; многозначный оператор Немыцкого; функциональные включения

Благодаря результатам Л.А. Люстерника, Л.М. Грейвса, А.А. Милютина (см. [1]–[3]) накрывающие отображения нормированных пространств в 60–70-е гг. XX века стали одним из основных инструментов теории экстремальных задач. Дальнейшему расширению применений накрывающих отображений в анализе во многом способствовали результаты А.В. Арутюнова о точках совпадения накрывающего и липшицева отображений метрических пространств (см., в частности, [4], [5]). Для нахождения точек совпадения в этих работах использовался итерационный процесс, частным случаем которого является последовательность итераций, используемая в доказательстве теоремы Банаха и ее многочисленных обобщений. Аналогичные итерации были использованы в [6]–[8] для доказательства теорем о нелинейных возмущениях — утверждений, описывающих свойства действующего в метрических пространствах отображения двух аргументов, являющегося накрывающим по одному из них и липшицевым по второму. Эти исследования были продолжены в ряде работ (см. [9]–[12]) с целью применения к интегральным, дифференциальным, функционально-дифференциальным, разностным уравнениям неявного вида. В связи с изучением задач управления, краевых задач, систем интегральных, дифференциальных, функционально-дифференциальных уравнений и включений в работах [13]–[15] теоремы о нелинейных возмущениях были распространены на произведения метрических пространств, в которых была введена векторная метрика, представляющая собой вектор из $\mathbb{R}^n_+$ с компонентами — метриками пространств-сомножителей. Дальнейшему развитию этих результатов посвящена статья [16], в которой рассмотрены однозначные отображения пространств с векторнозначной метрикой, являющейся элементом конуса некоторого нормированного пространства.

Здесь предлагается утверждение о точках совпадения многозначных отображений таких пространств, полученные результаты применяются к исследованию функциональных включений в пространствах измеримых функций.

Пусть E — линейное нормированное пространство, $E_+ \subset E$ — замкнутый выпуклый конус, определяющий упорядоченность:

$$\forall r_1, r_2 \in E \quad r_1 \leqslant r_2 \quad \Leftrightarrow \quad r_2 - r_1 \in E_+.$$

Пусть задано непустое множество $\mathcal{X}$. Отображение $\mathcal{P}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}^2 \to E_+$ называют *векторнозначной метрикой,* если для любых $x, u, v \in \mathcal{X}$ выполнены следующие соотношения:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = u; \quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u) = \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(u,x); \quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u) \leqslant \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,v) + \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(v,u).$$

Пространство с векторнозначной метрикой обозначаем $(\mathcal{X}, \mathcal{P}_{\mathcal{X}})$ или коротко $\mathcal{X}$.

Приведем векторные аналоги основных понятий метрических пространств. *Замкнутый шар с центром в точке* $x' \in \mathcal{X}$ *радиуса* $r \in E_+$ в пространстве $\mathcal{X}$ — это множество $\mathrm{B}_{\mathcal{X}}(x', r) \doteq \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, x') \leqslant r\}$; r *-раздутие* $\mathrm{B}_{\mathcal{X}}(U, r)$ множества $U \subset \mathcal{X}$ определяется равенством $\mathrm{B}_{\mathcal{X}}(U, r) \doteq \bigcup_{x' \in U} \mathrm{B}_{\mathcal{X}}(x', r)$. Под *сходимостью* $x_n \to x$ при $n \to \infty$ в $\mathcal{X}$ понимается сходимость $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x) \to 0$ в E. Множество $U \subset \mathcal{X}$ *замкнуто,* если для любой сходящейся последовательности его элементов $x_n \in U$, $x_n \to x$ выполнено $x \in U$. Последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ называют *фундаментальной,* если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall m > N \quad \|\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x_m)\|_E \leqslant \varepsilon.$$

Если любая фундаментальная последовать в $\mathcal{X}$ сходится, то это пространство называют *полным.* Обозначим $\mathrm{Cl}(\mathcal{X})$ — совокупность непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathcal{X}$.

Отметим, что на пространства с векторнозначной метрикой не переносятся понятия расстояния от точки до множества и расстояния по Хаусдорфу между множествами, поскольку ограниченное множество в E_+ может не иметь инфимума (в отличие от линейного порядка в $\mathbb{R}$ упорядоченность в E частичная).

Везде далее предполагается, что E, M — некоторые линейные нормированные пространства, снабженные замкнутыми выпуклыми конусами E_+, M_+.

В пространстве $\mathcal{L}(M, E)$ линейных ограниченных операторов $F : M \to E$ определим множество

$$\mathcal{L}(M,E)_+ \doteq \{F : M \to E : \, F(M_+) \subset E_+\}$$

положительных операторов. Очевидно, $\mathcal{L}(M,E)_+$ является замкнутым выпуклым конусом в пространстве $\mathcal{L}(M,E)$. Например, замкнутость этого множества вытекает из следующего соотношения, справедливого для любой сходящейся последовательности $\{A_i\} \subset \mathcal{L}(M,E)_+$, $A_i \to A \in \mathcal{L}(M,E)$:

$$A_i m \to Am \;\; \forall m \in M_+ \;\;\Rightarrow\;\; Am \in E_+ \;\; \forall m \in M_+ \;\;\Rightarrow\;\; A \in \mathcal{L}(M,E)_+.$$

Обозначим символом $I_E \in \mathcal{L}(E,E)$ — тождественный оператор.

Пусть заданы пространства $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ с векторнозначными метриками

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}^2 \to E_+\,, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y}^2 \to M_+\,.$$

Следующее определение — аналог определения [4] свойства накрывания многозначных отображений метрических пространств.

О п р е д е л е н и е 1. Отображение $\Psi : \mathcal{X} \to \mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ будем называть *накрывающим с операторным коэффициентом* $K \in \mathcal{L}(M, E)_+$ или K*-накрывающим относительно векторнозначных метрик,* если

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad \forall r \in M_+ \quad \mathrm{B}_{\mathcal{Y}}(\Psi(x), r) \subset \Psi(\mathrm{B}_{\mathcal{X}}(x, Kr)).$$

Накрывание относительно векторнозначных метрик эквивалентно следующему свойству

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad \forall y \in \Psi(x) \quad \forall y' \in \mathcal{Y} \quad \exists x' \in \mathcal{X} \quad \Psi(x') \ni y',\ \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x', x) \leqslant K\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(y, y').$$

Если $E = M = \mathbb{R}$, то векторнозначная метрика совпадает с «обычной». В этом случае определение 1 равносильно определению α-накрывания [4], причем $K = (\alpha^{-1})_{1\times 1}$. Если $E = \mathbb{R}^n$, $M = \mathbb{R}^m$, то отображение K представимо $n \times m$ матрицей с неотрицательными компонентами, в этом случае определение 1 совпадает с определением работы [15].

О п р е д е л е н и е 2. Отображение $\Phi : \mathcal{X} \to \mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ будем называть *липшицевым с операторным коэффициентом* $B \in \mathcal{L}(E, M)_+$ или B*-липшицевым относительно векторнозначных метрик*, если

$$\forall x, x' \in \mathcal{X} \quad \Phi(x) \subset \mathrm{B}_{\mathcal{Y}}\big(\Phi(x'), B\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x', x)\big).$$

Отметим, что это включение равносильно соотношению

$$\forall x, x' \in \mathcal{X} \quad \forall y \in \Phi(x) \quad \exists y' \in \Phi(x') \quad \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(y', y) \leqslant B\,\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x', x).$$

Если $E = M = \mathbb{R}$, то $B = (\beta)_{1\times 1}$ и определение 2 есть определение классического условия Липшица с коэффициентом β.

Для отображения $\Phi : \mathcal{X} \to \mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ стандартно определяем график — множество $\mathrm{gph}(\Phi) \doteq \doteq \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : y \in \Phi(x)\}$.

Сформулируем утверждение о точках совпадения многозначных отображений в пространствах с векторнозначной метрикой. Точкой совпадения отображений $\Psi, \Phi : \mathcal{X} \to \mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ называют (см. [4]) аргумент $x \in \mathcal{X}$, для которого справедливо

$$\Psi(x) \cap \Phi(x) \neq \emptyset.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть существуют такие* $K \in \mathcal{L}(M, E)_+$, $B \in \mathcal{L}(E, M)_+$, *что отображение* $\Psi : \mathcal{X} \to \mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ *является* K*-накрывающим, а отображение* $\Phi : \mathcal{X} \to \mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ — B*-липшицевым (относительно векторнозначных метрик); кроме того, графики этих отображений* $\mathrm{gph}(\Psi)$, $\mathrm{gph}(\Phi)$ *замкнуты и хотя бы один из них является полным подпространством произведения* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Тогда, если для спектрального радиуса ϱ *линейного ограниченного положительного оператора* $KB \in \mathcal{L}(E, E)_+$ *имеет место оценка* $\varrho(KB) < 1$, *то для любых* $x_0 \in \mathcal{X}$, $\psi_0 \in \Psi(x_0)$, $\phi_0 \in \Phi(x_0)$ *существует точка совпадения* x *отображений* Ψ, Φ, *удовлетворяющая неравенству*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, x_0) \leqslant (I_E - KB)^{-1} K\,\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\psi_0, \phi_0). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что вследствие оценки $\varrho(KB) < 1$ оператор $(I_E - KB) : E \to E$ обратим, и обратный оператор представим суммой ряда Неймана: $(I_E - KB)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (KB)^i$. Из этого представления, в силу замкнутости конуса $\mathcal{L}(E, E)_+$, следует положительность оператора $(I_E - KB)^{-1} : E \to E$ (в противном случае неравенство (1) было бы невозможно).

Для нахождения точки совпадения x отображений Ψ, Φ построим итерационную последовательность следующим образом. Обозначим $\psi_1 \doteq \phi_0$. Для накрывающего отображения Ψ существует элемент $x_1 \in \mathcal{X}$ такой, что

$$\Psi(x_1) \ni \psi_1, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_1, x_0) \leqslant K\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\psi_1, \psi_0).$$

Вследствие липшицевости отображения Φ существует элемент $\phi_1 \in \Phi(x_1)$, при котором справедливо неравенство $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\phi_1, \phi_0) \leqslant B\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_1, x_0)$. Далее положим $\psi_2 \doteq \phi_1$. Для накрывающего отображения Ψ существует элемент $x_2 \in \mathcal{X}$ такой, что

$$\Psi(x_2) \ni \psi_2, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_2, x_1) \leqslant K\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\psi_2, \psi_1) = K\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\phi_1, \phi_0) \leqslant KB\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_1, x_0).$$

Повторяя аналогичные рассуждения на каждом следующем шаге, мы определим последовательности $\{x_i\} \subset \mathcal{X}$, $\{\phi_i\} \subset \mathcal{Y}$, $\{\psi_i\} \subset \mathcal{Y}$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} \phi_i \in \Phi(x_i), \quad \psi_i \in \Psi(x_i), \quad \psi_{i+1} = \phi_i, \\ \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_{i+1}, x_i) \leqslant KB\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_i, x_{i-1}) \leqslant (KB)^i \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_1, x_0) \leqslant (KB)^i K\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\psi_0, \phi_0). \end{gathered} \tag{2}$$

Покажем, что последовательность $\{x_i\} \subset \mathcal{X}$ является фундаментальной. В силу соотношений (2) для любых натуральных j, l имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_{j+l}, x_j) \leqslant \textstyle\sum_{i=j}^{j+l-1} \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_{i+1}, x_i) \leqslant \sum_{i=0}^{l-1} (KB)^i (KB)^j K\,\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\psi_0, \phi_0) \leqslant \\ \leqslant (I_E - KB)^{-1} (KB)^j K\,\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\psi_0, \phi_0). \end{aligned} \tag{3}$$

Так как $\varrho(KB) < 1$, то имеет место сходимость $(KB)^j \to 0$ при $j \to \infty$, отсюда заключаем, что последовательность $\{x_i\} \subset \mathcal{X}$, действительно, фундаментальная.

Последовательности $\{\phi_i\} \subset \mathcal{Y}$, $\{\psi_i\} \subset \mathcal{Y}$ также являются фундаментальными в силу оценок

$$\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\psi_{i+1}, \psi_i) = \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\phi_i, \phi_{i-1}) \leqslant B\,\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_i, x_{i-1}).$$

В условиях доказываемой теоремы график одного из отображений Ψ, Φ замкнут, без ограничения общности полагаем замкнутым множество $\mathrm{gph}(\Psi)$. Тогда $(x, \psi) \in \mathrm{gph}(\Psi)$, где $x \doteq \lim x_i$, $\psi \doteq \lim \psi_i$. Далее, из равенства $\psi_i = \phi_{i-1}$, следует $\psi = \lim \phi_i$, а в силу замкнутости множества $\mathrm{gph}(\Phi)$ выполнено включение $(x, \psi) \in \mathrm{gph}(\Phi)$.

Из неравенства (3) следует оценка

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_i, x_0) \leqslant (I_E - KB)^{-1} K\,\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\psi_0, \phi_0), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве (в силу замкнутости конуса E_+), получаем, что найденная точка x совпадения отображений Ψ, Φ удовлетворяет неравенству (1). □

З а м е ч а н и е. Спектральные радиусы операторов BK и KB совпадают, а оценка (1) равносильна оценке

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, x_0) \leqslant K(I_M - BK)^{-1}\,\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\psi_0, \phi_0).$$

Для приложений теоремы 1 к исследованию функциональных, интегральных, дифференциальных включений требуются условия накрывания относительно векторнозначных метрик многозначного оператора Немыцкого в функциональных пространствах, прежде всего в пространствах измеримых функций. Мы сформулируем здесь признак накрывания многозначного оператора Немыцкого в пространстве существенно ограниченных функций.

Обозначим $\mathbb{R}^n_+$ — множество n-мерных векторов с неотрицательными компонентами (конечно, являющееся замкнутым выпуклым конусом пространства $\mathbb{R}^n$). В пространстве $\mathbb{R}^n$ определим векторнозначную метрику $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_+$ равенством

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}^n}(r, \bar{r}) = \big(|r_1 - \bar{r}_1|, \ldots, |r_n - \bar{r}_n|\big), \quad r, \bar{r} \in \mathbb{R}^n.$$

Определенная таким образом векторнозначная метрика эквивалентна "обычной скалярной" метрике

$$\rho_{\mathbb{R}^n}(r,\bar r)=\|r-\bar r\|_{\mathbb{R}^n},$$

т. е. последовательность $\{r_i\}\subset\mathbb{R}^n$ сходится в метрике $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^n}$ тогда и только тогда, когда она сходится в метрике $\rho_{\mathbb{R}^n}$; совокупности открытых, замкнутых, компактных подмножеств пространств $\big(\mathbb{R}^n,\mathcal{P}_{\mathbb{R}^n}\big)$, $\big(\mathbb{R}^n,\rho_{\mathbb{R}^n}\big)$ совпадают. Любой линейный оператор $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, удовлетворяющий требованию $A(\mathbb{R}^n_+)\subset\mathbb{R}^m_+$, есть матрица размерности $m\times n$ с неотрицательными компонентами; обозначим множество таких операторов $\mathbb{R}^{m\times n}_+$.

В пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ существенно ограниченных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ зададим векторнозначную метрику $\mathcal{P}_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}:L_\infty(\mathbb{R}^n)\times L_\infty(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n_+$ следующим соотношением

$$\mathcal{P}_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}(x,\bar x)=\big(\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}|x_1(t)-\bar x_1(t)|,\ldots,\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}|x_n(t)-\bar x_n(t)|\big),\quad x,\bar x\in L_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Отметим, что в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ сходимость относительно определенной здесь векторнозначной метрики $\mathcal{P}_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$ совпадает со сходимостью в "обычной" метрике

$$\rho_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}(x,\bar x)=\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}\|x(t)-\bar x(t)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Соответственно, равносильными в векторнозначной и "обычной" метриках являются понятия открытости, замкнутости, компактности множеств из $L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Пусть задано многозначное отображение $f:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^m)$, которое удовлетворяет условию Каратеодори, т. е. измеримо по первому и непрерывно (в метрике Хаусдорфа) по второму аргументам, кроме того, предполагаем, что выполнено следующее условие:

$$\forall r\in\mathbb{R}_+\quad\exists m\in\mathbb{R}_+\quad\forall x\in\mathbb{R}^n\quad|x|\leqslant r\quad\Rightarrow\quad\dot\forall t\in[a,b]\quad\forall y\in f(t,x)\quad|y|\leqslant m.\tag{4}$$

Определим соответствующий многозначный оператор Немыцкого

$$N_f:L_\infty(\mathbb{R}^n)\rightrightarrows L_\infty(\mathbb{R}^m),\quad (N_f\,x)(t)=\big\{y\in L_\infty(\mathbb{R}^m)\mid\ y(t)\in f\big(t,x(t)\big)\ \ \dot\forall t\in[a,b]\big\}.\tag{5}$$

Вследствие условия Каратеодори для любого $x\in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ множество измеримых селекторов многозначного отображения $f(\cdot,x(\cdot))$ не пусто, а в силу соотношения (4) в этом множестве есть элементы из $L_\infty(\mathbb{R}^m)$, т. е. не пусто множество $N_f\,x\subset L_\infty(\mathbb{R}^m)$. Из замкнутости при п.в. $t\in[a,b]$ множества $f(t,x(t))\subset\mathbb{R}^m$ очевидно следует замкнутость множества $N_f\,x\subset L_\infty(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, для оператора (5) будем использовать обозначение

$$N_f:L_\infty(\mathbb{R}^n)\to\mathrm{Cl}\big(L_\infty(\mathbb{R}^m)\big).$$

Т е о р е м а 2. *Пусть многозначное отображение $f(t,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^m)$ является A-накрывающим (относительно векторнозначных метрик), где $A\in\mathbb{R}^{n\times m}_+$. Тогда заданный соотношением (5) оператор Немыцкого $N_f:L_\infty(\mathbb{R}^n)\to\mathrm{Cl}\big(L_\infty(\mathbb{R}^m)\big)$ является накрывающим с тем же операторным коэффициентом A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть заданы любой вектор $x\in\mathbb{R}^n$ и произвольная функция $y\in\mathrm{B}_{L_\infty(\mathbb{R}^m)}(N_f\,x,\,r)$. Докажем включение $y\in N_f\,\big(\mathrm{B}_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}(x,\,Kr)\big)$; согласно определению 1 это будет означать, что оператор $N_f:L_\infty(\mathbb{R}^n)\to\mathrm{Cl}\big(L_\infty(\mathbb{R}^m)\big)$ является A-накрывающим.

Так как для п.в. $t\in[a,b]$ выполнено $y(t)\in\mathrm{B}_{\mathbb{R}^m}\big((N_f\,x)(t),\,r\big)$, то в силу A-накрывания отображения $f(t,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^m)$ имеем $y(t)\in f\big(t,\,\mathrm{B}_{\mathbb{R}^n}\big(x(t),\,Kr\big)\big)$. Согласно лемме Филиппова [17, теорема 1.5.15] существует такая измеримая функция $u:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, что

$$u(t)\in\mathrm{B}_{\mathbb{R}^n}\big(x(t),\,Kr\big),\quad y(t)\in f\big(t,u(t)\big)\quad\dot\forall t\in[a,b].$$

Следовательно, выполнено $y \in N_f u$, где $u \in \mathrm{B}_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}(x, Kr)$, и таким образом, справедливо включение $y \in N_f \left(\mathrm{B}_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}(x, Kr)\right)$. $\square$

Теперь применим полученные результаты к исследованию следующей системы функциональных включений

$$\begin{cases} f_1\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) \cap g_1\big(t, x_1(h_1(t)), \ldots, x_n(h_n(t))\big) \neq \emptyset, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ f_m\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) \cap g_m\big(t, x_1(h_1(t)), \ldots, x_n(h_n(t))\big) \neq \emptyset. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь многозначное отображение $f = (f_1, \ldots, f_n) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^m)$ удовлетворяет условию Каратеодори, условию (4) и при п.в. $t \in [a, b]$ отображение второго аргумента $f(t, \cdot)$ является A-накрывающим (относительно векторнозначных метрик), где $A \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$; многозначное отображение $g = (g_1, \ldots, g_n) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^m)$ также удовлетворяет условию Каратеодори и условию (4), а при п.в. $t \in [a, b]$ по второму аргументу является Липшицевым, т. е. для некоторой матрицы $B \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$ (не зависящей от t) при любых $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in g(t, x)$ существует вектор $\bar{y} \in g(t, \bar{x})$ такой, что справедливо неравенство

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}^m}(y, \bar{y}) \leqslant B\, \mathcal{P}_{\mathbb{R}^n}(x, \bar{x}).$$

Включение (6) можно записать в виде $N_f x \cap N_g x \neq \emptyset$, где оператор Немыцкого $N_f : L_\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Cl}\big(L_\infty(\mathbb{R}^m)\big)$, порожденный функцией f, является A-накрывающим, оператор Немыцкого $N_g : L_\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Cl}\big(L_\infty(\mathbb{R}^m)\big)$, порожденный функцией g является B-липшицевым (относительно векторнозначных метрик). Далее, пространства $L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ полные, и их замкнутые подмножества — $\mathrm{gph}(N_f)$, $\mathrm{gph}(N_g)$ также являются полными. Если $\varrho(BA) < 1$, то выполнены все предположения теоремы 1, включение (6) разрешимо и, более того, для любых функций $x_0 \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi_0 \in N_f(x_0)$, $\phi_0 \in N_g(x_0)$ существует решение $x \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее неравенству

$$\mathcal{P}_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}(x, x_0) \leqslant (I_{\mathbb{R}^n} - KB)^{-1} K\, \mathcal{P}_{L_\infty(\mathbb{R}^m)}(\psi_0, \phi_0).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Люстерник Л.А.* Об условных экстремумах функционалов // Математический сборник. 1934. Т. 41. № 3. С. 390–401.
2. *Graves L.M.* Some mapping theorems // Duke Math. J. 1950. V. 17. № 2. P. 111–114.
3. *Левитин Е.С., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.* Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями // УМН. 1978. Т. 33. № 6(204). С. 85–148.
4. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
5. *Арутюнов А.В.* Точки совпадения двух отображений // Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48. № 1. С. 89–93.
6. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.
7. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. Iss. 3. P. 1026–1044.
8. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.
9. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 31–56.
10. *Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Об исследовании систем функциональных уравнений методами теории накрывающих отображений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 1. С. 38–42.
11. *Жуковская Т.В., Жуковский Е.С.* Об итерационном методе нахождения решений операторных уравнений с накрывающими отображениями // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2014. Т. 19. Вып. 2. С. 365–368.

12. *Arutyunov A., de Oliveira V.A., Pereira F.L., Zhukovskiy S., Zhukovskiy E.* On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2015. V. 94. № 1. P. 129–143.

13. *Жуковский Е.С.* О точках совпадения векторных отображений // Известия вузов. Математика. 2016. № 10. С. 14–28.

14. *Жуковский Е.С.* О возмущениях векторно накрывающих отображений и системах уравнений в метрических пространствах // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57. № 2(236). С. 297–311.

15. *Жуковский Е.С.* О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств // Математические заметки. 2016. Т. 100. № 3. С. 344–362.

16. *Жуковский Е.С.* О возмущениях накрывающих отображений в пространствах с векторнозначной метрикой // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 373–377.

17. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 224 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 15-01-04601, 16-31-50038) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ № НШ-8215.2016.1.

Поступила в редакцию 21 октября 2016 г.

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики; Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: zukovskys@mail.ru

Плужникова Елена Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

UDC 517.988.6 + 517.922
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1974-1982

MULTI-VALUED COVERING MAPPINGS IN SPACES WITH VECTOR-VALUED METRICS IN RESEARCH OF FUNCTIONAL INCLUSIONS

© E. S. Zhukovskiy [1), E. A. Pluzhnikova [2)]

[1)] Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov, Russian Federation, 392000
The Peoples' Friendship University of Russia
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: zukovskys@mail.ru
[2)] Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru

The concept of covering is extended to multi-valued mappings acting in spaces with vector-valued metrics. The statement about coincidence points of two multi-valued mappings (acting in spaces with vector-valued metrics), one of which is covering and the other is Lipschitz, is formulated and proved. The test of covering of Nemytskiy operator in the space of measurable essentially bounded vector-valued functions equipped with a vector-valued metric is derived. These results are applied to the research of functional inclusions with deviating argument.

Key words: spaces with vector-valued metrics; coincidence points; multi-valued covering mappings; the Nemytskiy multi-valued operator; functional inclusions

REFERENCES

1. *Lyusternik L.A.* Ob uslovnyh ehkstremumah funkcionalov // Matematicheskij sbornik. 1934. T. 41. № 3. S. 390–401.

2. *Graves L.M.* Some mapping theorems // Duke Math. J. 1950. V. 17. № 2. P. 111–114.

3. *Levitin E.S., Milyutin A.A., Osmolovskij N.P.* Usloviya vysshih poryadkov lokal'nogo minimuma v zadachah s ogranicheniyami // UMN. 1978. T. 33. № 6(204). S. 85–148.

4. *Arutyunov A.V.* Nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskih prostranstvah i nepodvizhnye tochki // Doklady Akademii nauk. 2007. T. 416. № 2. S. 151–155.

5. *Arutyunov A.V.* Tochki sovpadeniya dvuh otobrazhenij // Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya. 2014. T. 48. № 1. S. 89–93.

6. *Avakov E.R., Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S.* Nakryvayushchie otobrazheniya i ih prilozheniya k differencial'nym uravneniyam, ne razreshennym otnositel'no proizvodnoj // Differencial'nye uravneniya. 2009. T. 45. № 5. S. 613–634.

7. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. Iss. 3. P. 1026–1044.

8. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* O korrektnosti differencial'nyh uravnenij, ne razreshennyh otnositel'no proizvodnoj // Differencial'nye uravneniya. 2011. T. 47. № 11. S. 1523–1537.

9. *Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A.* Ob upravlenii ob"ektami, dvizhenie kotoryh opisyvaetsya neyavnymi nelinejnymi differencial'nymi uravneniyami // Avtomatika i telemekhanika. 2015. № 1. S. 31–56.

10. *Zhukovskaya T.V., Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A.* Ob issledovanii sistem funkcional'nyh uravnenij metodami teorii nakryvayushchih otobrazhenij // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences, 2013. T. 18. Vyp. 1. S. 38–42.

11. *Zhukovskaya T.V., Zhukovskiy E.S.* Ob iteracionnom metode nahozhdeniya reshenij operatornyh uravnenij s nakryvayushchimi otobrazheniyami // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences, 2014. T. 19. Vyp. 2. S. 365–368.

12. *A. Arutyunov, V.A. de Oliveira, F. Lobo Pereira, S. Zhukovskiy, E. Zhukovskiy* On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2015. V. 94. № 1. P. 129–143.

13. *Zhukovskiy E.S.* O tochkah sovpadeniya vektornyh otobrazhenij // Izvestiya vuzov. Matematika. 2016. № 10. S. 14–28.

14. *Zhukovskiy E.S.* O vozmushcheniyah vektorno nakryvayushchih otobrazhenij i sistemah uravnenij v metricheskih prostranstvah // Sibirskij matematicheskij zhurnal. 2016. T. 57. № 2(236). S. 297–311.

15. *Zhukovskiy E.S.* O tochkah sovpadeniya mnogoznachnyh vektornyh otobrazhenij metricheskih prostranstv // Matematicheskie zametki. 2016. T. 100. № 3. S. 344–362.

16. *Zhukovskiy E.S.* O vozmushcheniyah nakryvayushchih otobrazhenij v prostranstvah s vektornoznachnoj metrikoj // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences, 2016. T. 21. Vyp. 2. S. 373–377.

17. *Borisovich YU.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuhovskij V.V.* Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyh otobrazhenij i differencial'nyh vklyuchenij. M.: LIBROKOM, 2011. 224 s.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects №№ 15-01-04601, 16-31-50038) and by the grant of the Russian Federation President for the state support of leading scientific schools № NSh-8215.2016.1.

Received 21 October 2016

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics; Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: zukovskys@mail.ru

Pluzhnikova Elena Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Информация для цитирования:

Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Многозначные накрывающие отображения пространств с векторнозначной метрикой в исследовании функциональных включений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 1974-1982. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1974-1982

Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. Mnogoznachnye nakryvayuschie otobrazheniya prostranstv s vektornoznachnoj metrikoj v issledovanii funktsional'nyh vklyuchenij [Multi-valued covering maps spaces with vector-valued metrics in research of functional inclusions]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 1974-1982. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1974-1982 (In Russian)