In this paper, hyperbolic differential inclusions with external perturbations and with impulses are considered. Here we represent the concept of approximate solution (δ –solution) for a hyperbolic differential inclusion with impulses. The asymptotic properties of solutions sets to approximating differential inclusions with external disturbance are derived.

Key words: hyperbolic differential inclusions with impulses; approximating map; radius of external perturbations; modulus of continuity; δ –solution.

Скоморохов Виктор Викторович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: uaa@nnn.tstu.ru

Skomorokhov Viktor Viktorovich, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: uaa@nnn.tstu.ru

УДК 517.968

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО В ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© С.В. Солодуша, И.В. Мокрый

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра I рода; численные методы.

Статья посвящена специфике вычисления ядер уравнений Вольтерра I рода при фиксированной длине мантиссы в машинном представлении вещественного числа с плавающей точкой. На языке PASCAL разработано программное обеспечение для вычисления ядер, реализующее функцию отслеживания достоверных разрядов мантиссы. На тестовых примерах проиллюстрированы типовые случаи систематического накопления ошибок.

В статье рассматривается интегральное уравнение Вольтерра I рода типа свертки:

$$\int_0^t K_N(t-s)\phi(s)ds = y(t),\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

$$K_N(t-s) = \sum_{q=1}^{N} (-1)^{q+1}\, q^2 e^{-\pi^2 q^2 (t-s)},\ y(t) = \frac{1}{2\pi^2} g_0\left(t\right), \tag{2}$$

введенное в [1] в связи с поиском решения $u(1,t)$ обратной граничной задачи

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0,1)\,, \quad t \geqslant 0,$$

$$u\left(x,0\right) = 0,\ u\left(0,t\right) = 0,\ u_x\left(0,t\right) = g_0\left(t\right).$$

При численном решении (1), (2) возникают погрешности, связанные не только с погрешностью метода, но и с ошибками при выполнении операций машинной арифметики над вещественными числами с плавающей точкой.

Цель данной работы — разработать алгоритм вычисления K_N , учитывающий особенности машинной арифметики и обеспечивающий желаемое (заданное) число достоверных позиций в мантиссе. Приведем случаи систематического накопления ошибок, возникающие при вычислении значений ядра (2). Включим в представление вещественного числа параметр f, равный числу достоверных цифр в мантиссе (начиная слева). Считаем, что вещественное число $x = s \cdot M \cdot 10^{-L+p}$ задается набором (s, M, p, f), где $s \in \{-1, 0, +1\}$ — знак числа, $M \in \{10^{L-1}, 10^{L-1}+1, ..., 10^{L}-1\} \cup \{0\}$ — мантисса числа, L — число позиций мантиссы, p — порядок числа. По аналогии с [2], проиллюстрируем специфику расчетов при сложении чисел разных порядков в (2) на примере.

П р и м е р 1. Пусть $N = 50$, $\lambda_0 = 10^{-3}$, $L \geqslant 10$. Выберем

$$x_1 = \sum_{q=11}^{34} (-1)^{q+1}\, q^2 e^{-\pi^2 q^2 \lambda_0},\ x_2 = \sum_{q=35}^{50} (-1)^{q+1}\, q^2 e^{-\pi^2 q^2 \lambda_0}$$

и найдем $x_\Sigma = x_1 + x_2$. Полагая по [3] $10^{p_\Sigma - f_\Sigma} = 10^{p_1 - f_1} + 10^{p_2 - f_2}, p_\Sigma \geqslant p_1 \geqslant p_2$, легко получить, что

$$f \geqslant \left[f_1 - \ln(1 + 10^{-p_1+f_1+p_2-f_2}) \right] = f_s, \tag{3}$$

где символ антье $[...]$ означает целую часть числа. В таблице 1 даны параметры $(1, M_1, 2, f_1)$, $(1, M_2, -2, f_2)$ и $(1, M_\Sigma, 2, f_\Sigma)$, которые определяют x_1, x_2 и x_Σ соответственно. В последнем столбце приведены значения миноранты f_s, подсчитанные по (3).

Таблица 1: Значения M и f для x_1, x_2 и x_Σ.

L	M_1	f_1	M_2	f_2	M_Σ	f_Σ	f_s
10	1865224455	9	4498144699	8	1865674269	8	8
11	18652244592	11	44981446726	8	18656742737	11	10
12	186522445926	11	449814466957	10	186567427373	11	10

Следующий пример иллюстрирует ситуацию, возникающую при вычислении разности между числами в (2).

П р и м е р 2. Пусть $N = 50$, $\lambda_0 = 10^{-3}$, $L \geqslant 10$. Введем

$$x_3 = \sum_{q=1}^{10} (-1)^{q+1}\, q^2 e^{-\pi^2 q^2 \lambda_0},\ \ x_4 = \sum_{q=11}^{50} (-1)^{q+1}\, q^2 e^{-\pi^2 q^2 \lambda_0}.$$

Определим $x_\Delta = |x_4| - |x_3|$. Предположим, что $|M_4 - M_3| < 10^{m-1} - 1$, $p_\Delta \leqslant p_3 = p_4$ и используем, следуя [3], эмпирическую оценку:

$$f_\Delta \geqslant \begin{cases} 0, \text{ если } f - L + \lg(\lambda) \leqslant 0, \\ \left[f - L + \lg(\lambda) \right], \text{ если } f - L + \lg(\lambda) > 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $\lambda = |M_4 - M_3| + 1$, $f = \min\{f_3,\ f_4\}$. Ниже даны параметры $(-1, M_3, 2, f_3)$, $(1, M_4, 2, f_4)$ и $(-1, M_\Delta, 2, f_\Delta)$, которые задают значения x_3, x_4 и x_Δ. Оценка снизу f_r, установленная с помощью (4), дана в последнем столбце таблицы 2.

Очевидно, что обнуление нескольких старших позиций приводит к возникновению числа с меньшим количеством значащих цифр в мантиссе.

Рисунок 1 иллюстрирует одномоментную потерю старших разрядов для $N = 12$. Расчеты проводились с помощью авторского программного обеспечения, реализованного на языке PASCAL.

Таблица 2: Значения M и f для x_3, x_4 и x_Δ.

L	M_3	f_3	M_4	f_4	M_Δ	f_Δ	f_r
10	1865674274	9	1865674268	8	0000000006	0	0
11	18656742750	11	18656742736	10	00000000014	1	0
12	186567427505	12	186567427372	11	000000000133	3	1

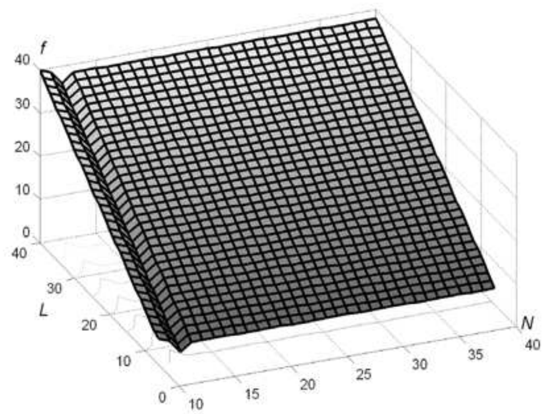

Рис. 1: Зависимость f от L и N при вычислении $K_N(0.001)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yaparova N.M.* Numerical methods for solving a boundary value inverse heat conduction problem // Inverse Problems in Science and Engineering. 2014. № 5. P. 832-847.

2. *Солодуша С.В.* Применение численных методов для уравнений Вольтерра I рода, возникающих в обратной граничной задаче теплопроводности // Известия ИГУ. Серия: Математика. 2015. № 1. С. 96-105.

3. *Мокрый И.В., Хамисов О.В., Цапах А.С.* Основные механизмы возникновения вычислительной ошибки при компьютерных расчетах // Материалы IV Всеросс. конф. «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск: Наследие, 2009. С. 185.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ № 15-01-01425a.

Поступила в редакцию 15 мая 2015 г.

Solodusha S.V., Mokry I.V. ON KERNEL CALCULATION OF THE INTEGRAL EQUATION ARISING IN INVERSE BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF HEAT CONDUCTION

The article deals with the calculation of kernels of Volterra integral equations of the first kind at a fixed length of the significand in the floating point representation of a real number. The PASCAL language was used to develop the software for the calculation of kernels, which implements the function of tracking the valid digits of the significand. The test examples illustrate the typical cases of systematic error accumulation.

Key words: Volterra integral equations of the first kind; numerical methods.

Солодуша Светлана Витальевна, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая лабораторией «Неустойчивые задачи вычислительной математики», e-mail: solodusha@isem.sei.irk.ru

Solodusha Svetlana Vitaliyevna, Melentiev Energy Systems Institute of SB RAS, Irkutsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, the Head of the Laboratory «Nonlinear Problems of Computational Mathematics», e-mail: solodusha@isem.sei.irk.ru

Мокрый Игорь Владимирович, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, e-mail: ygr@isem.sei.irk.ru

Mokry Igor Vladimirovich, Melentiev Energy Systems Institute of SB RAS, Irkutsk, the Russian Federation, Candidate of Techniques, Senior Researcher, e-mail: ygr@isem.sei.irk.ru

УДК 517.977.52

ПОЗИЦИОННЫЙ ПРИНЦИП МИНИМУМА ДЛЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© **С.П. Сорокин**

Ключевые слова: дискретное оптимальное управление; необходимые условия; принцип максимума; позиционные управления; итерационные методы.

Получены необходимые условия глобальной оптимальности для трех классов задач дискретного оптимального управления. Условия используют позиционные управления, формулируются в конструкциях дискретного принципа максимума и не предполагают выпуклости входных данных.

1. Введение и постановка задачи

Работа посвящена развитию позиционного принципа минимума [1–3] — необходимого условия глобальной оптимальности — для нелинейных задач дискретного оптимального управления, формулируемого в терминах соответствующего принципа максимума (ПМ) [4, 5] и, что примечательно, не предполагающего никаких условий выпуклости входных данных. Особенностью полученных условий оптимальности является оперирование вспомогательными позиционными управлениями (управлениями с обратной связью), потенциально обеспечивающими улучшение «опорного» (текущего) управления по целевому функционалу. Этот подход близок к проблеме оценки качества синтезирующего управления в дифференциальных играх [6] и имеет своим прототипом недавние результаты по условиям оптимальности для классических задач оптимального управления [1–3].

В работе рассматривается следующая нелинейная задача (P) дискретного оптимального управления:

$$J[u] = l(x_N) \to \min;$$

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \quad u_k \in U_k, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad x_0 = x^0, \tag{1}$$

и её частные варианты — (обобщенно-) линейная (P_L) и линейно-квадратичная (P_{LQ}) по состоянию задачи, которым посвящены разделы 3 и 4 соответственно.

Относительно задачи (P) и её подклассов предполагается, что правые части систем (функции $f_k(x,u)$) непрерывны по u и дифференцируемы по x, целевые функции l дифференцируемы, множества U_k компактны, начальные состояния $x_0 = x^0$ и натуральные числа N заданы.

Здесь и далее через $u = \{u_k\}_{k=0}^{N-1}$, $u_k \in R^m$, обозначается управление, а через $x = x(u) = \{x_k\}_{k=0}^{N}$, $x_k \in R^n$, — соответствующая траектория системы (1). Через $\bar{u} = \{\bar{u}_k\}$ и $\bar{x} = x(\bar{u}) = \{\bar{x}_k\}$ обозначается допустимое управление и соответствующая траектория, исследуемые на оптимальность.