УДК 517.922, 517.988.6
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-571-578

О НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© И. Д. Серова

Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: irinka _ 36@mail.ru

Получено утверждение о существовании и оценке решений уравнений вида $\Upsilon(x,x)=y$, где действующее в частично упорядоченных пространствах отображение Υ по первому аргументу является накрывающим, а по второму — антитонным. Этот результат используется для доказательства теоремы типа Чаплыгина о дифференциальном неравенстве с отклоняющимся аргументом.
Ключевые слова: упорядоченно накрывающее отображение; дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом; задача Коши; неравенство типа Чаплыгина

Для получения оценок решений дифференциального уравнения часто используется теорема Чаплыгина (см. [1]) о дифференциальном неравенстве, утверждающая, что если функция u удовлетворяет неравенствам

$$u'(t) > f(t,u(t)) \ \ \forall t \geq t_0, \quad u(t_0) \geq x_0,$$

то для решения x задачи Коши

$$x' = f(t,x) \ \ \forall t \geq t_0, \quad x(t_0) = x_0,$$

справедлива оценка $x(t)<u(t)$ при $t>t_0$.

В связи с востребованностью оценок решений всевозможных уравнений в разнообразных теоретических и прикладных задачах распространение теоремы Чаплыгина на дифференциальные уравнения высших порядков, интегральные уравнения, функционально-дифференциальные уравнения, краевые задачи и т. д. является темой многих исследований (см., например, [2]–[8]).

В статье для неявного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом доказывается аналог теоремы Чаплыгина. Используется предложенное в совместных работах А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского [9]–[12] понятие упорядоченно накрывающего отображения. Метод доказательства основан на предлагаемом в статье утверждении об антитонных возмущениях упорядоченно накрывающего отображения, аналогичном результату из работы [2].

1. Основные понятия

Пусть $X \doteq (X,\preceq)$ — упорядоченное пространство, т. е. множество X с заданным на нем порядком $\preceq$. Для элементов $u,v\in X$ обозначим

$$\mathcal{O}_X(u) \doteq \{x\in X:\ x\preceq u\}, \quad [u,v]_X \doteq \{x\in X:\ v\preceq x\preceq u\}.$$

Пусть заданы пространства $(X,\preceq)$, $(Y,\preceq)$. Отображение $f:X\to Y$ называют (см. [13]) *изотонным на* множестве $V\subset X$, если для любых $x,u\in V$ из $x\succeq u$ следует $f(x)\succeq f(u)$, и *антитонным на* $V\subset X$, если для любых $x,u\in V$ из $x\succeq u$ следует $f(x)\preceq f(u)$. Изотонное (антитонное) на всем X отображение называют *изотонным* (*антитонным*).

В [9], [11] введено следующее

Определение 1. Отображение $f:X\to Y$ называется *упорядоченно накрывающим множество* $V\subset Y$, если для любого $u\in X$ выполнено включение

$$\mathcal{O}_Y\big(f(u)\big)\cap V\subset f\big(\mathcal{O}_X(u)\big);$$

или, что то же самое,

$$\forall\, u\in X\ \ \forall\, y\in V\ \ y\preceq f(u)\ \ \Rightarrow\ \ \exists x\in X\ \ f(x)=y\ \&\ x\preceq u.$$

Отображение, упорядоченно накрывающее все пространство Y, называется *упорядоченно накрывающим.*

Пусть $y\in Y$. Рассмотрим уравнение $f(x)=y$ с отображением $f:X\to Y$, представимым в виде

$$f(x)=\Upsilon(x,x),\ \ \forall x\in X,$$

где отображение $\Upsilon:X^2\to Y$ по одному аргументу обладает свойством упорядоченного накрывания, а по другому — монотонности.

Следуя [2], по отображению $\Upsilon:X^2\to Y$, множеству $U\subset X$ и элементу $y\in Y$ определим множество $\mathcal{S}(\Upsilon,U,y)$ всех цепей $S\subset U$ таких, что имеют место соотношения

$$\forall\, x\in S\ \ \Upsilon(x,x)\succeq y,$$
$$\forall\, x_1,x_2\in S\ \ x_1\prec x_2\ \Rightarrow\ \Upsilon(x_1,x_2)\preceq y.$$

Сформулируем используемый в данной работе аналог теоремы из [2].

Теорема 1. *Пусть существует такой элемент* $u_0\in X$, *что*

$$\Upsilon(u_0,u_0)\succeq y, \tag{1}$$

и выполнены условия:

(1.1) *при любом* $x\in\mathcal{O}_X(u_0)$ *отображение* $\Upsilon(\cdot,x):X\to Y$; *упорядоченно накрывает множество* $V\doteq\{y\}$ *;*

(1.2) *при любом* $x\in\mathcal{O}_X(u_0)$ *отображение* $\Upsilon(x,\cdot):X\to Y$ *является антитонным на множестве* $[x,u_0]_X$ *;*

(1.3) *любая цепь* $S\in\mathcal{S}\big(\Upsilon,\mathcal{O}_X(u_0),y\big)$ *ограничена снизу, и существует ее нижняя граница* $\omega\in X$ *, удовлетворяющая неравенству* $\Upsilon(\omega,\omega)\succeq y$.

Тогда множество решений уравнения

$$f(x)=y \tag{2}$$

не пусто, в нем существует минимальный элемент, который принадлежит $\mathcal{O}_X(u_0)$ *.*

Доказательство. Для доказательства теоремы определим множество

$$U_0=\{x\in\mathcal{O}_X(u_0):\ f(x)\succeq y\}.$$

Это множество не пусто, так как $u_0\in U_0$. Определим на нем бинарное отношение $\trianglelefteq$, полагая для $v,u\in U_0$ выполненным $v\trianglelefteq u$, если $v=u$, или если $v\prec u$ и $\Upsilon(v,u)\preceq y$. Данное отношение $\trianglelefteq$ рефлексивно, антисимметрично и транзитивно (для доказательства транзитивности используется предположение (1.2) теоремы). Следовательно, множество $(U_0,\trianglelefteq)$ является частично упорядоченным.

Согласно теореме Хаусдорфа (см., например, [14], гл. 1) в частично упорядоченном множестве $(U_0, \trianglelefteq)$ существует максимальная цепь S, которая содержит точку x_0. Из предположения (1.3) следует, что эта цепь,относительно исходного порядка $\preceq$, имеет нижнюю границу w, и справедливо неравенство $\Upsilon(w,w) \succeq y$.

Покажем, что построенная точка w является решением уравнения (2). Из включения $w \in \mathcal{O}_X(u_0)$ и условия (1.1) следует существование элемента $v \in X$, для которого выполнено

$$\Upsilon(v,w) = y, \quad v \preceq w. \tag{3}$$

Так как $v \preceq w$, то, в силу предположения (1.2) и равенства (3), $\Upsilon(v,v) \succeq y$.

Докажем, что для $\forall x \in S$ для найденного v будет выполнено $v \trianglelefteq x$. Учитывая то, что w – нижняя граница цепи S, то для любого $x \in S$ $x \succeq w$, а так как $v \preceq w$, то $v \preceq x$. Если $x = v$, то для v выполнено $v \trianglelefteq x$. Рассмотрим ситуацию $v \prec x$: из (3) и того, что $x \succeq w$, следует $\Upsilon(v,x) \preceq y$. Итак, действительно $v \trianglelefteq x$, кроме того, $v \in U_0$. Множество $S \cup \{v\}$ относительно порядка $\trianglerighteq$ является цепью, а в силу максимальности цепи S имеем $v \in S$. Поэтому $v \succeq w$. Это неравенство и второе неравенство в (3) означают, что $w = v$, следовательно, $\Upsilon(w,w) = y$. То есть w является решением уравнения (2).

Покажем, что найденный элемент $w \in \mathcal{O}_X(u_0)$ является минимальным в множестве решений уравнения (2). Предположим противное. Тогда

$$\exists\, z: \ \Upsilon(z,z) = y, \ \ z \prec w. \tag{4}$$

Для любого $x \in S$ из неравенства $x \succeq z$ вследствие условия (1.2) получим $\Upsilon(z,x) \preceq \Upsilon(z,z) = y$. Следовательно, множество $S \cup \{z\}$ относительно отношения $\trianglerighteq$ является цепью, а в силу максимальности цепи S имеем $z \in S$. Поэтому $z \succeq w$. Полученное неравенство противоречит (4). $\square$

В теореме 1 утверждается, что в множестве решений уравнения (2) существует минимальный, но не наименьший элемент. При использовании дополнительного предположения можно гарантировать наличие и наименьшего элемента.

С л е д с т в и е 1. *Пусть выполнены предположения теоремы 1 и для любых* $x_1, x_2 \in \mathcal{O}_X(u_0)$ *выполнено:*

(1.4) *если* $f(x_1) = f(x_2) = y$, *то существует* $z \in X$, *такой что* $z \preceq x_1$, $z \preceq x_2$, $f(z) \succeq y$.

Тогда в множестве принадлежащих $\mathcal{O}_X(u_0)$ *решений уравнения (2) существует наименьший элемент.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что минимальный в множестве решений уравнения (2) элемент $\omega \in \mathcal{O}_X(u_0)$ (существование которого установлено в теореме 1) является наименьшим. Предположим, что это не верно, и найдется еще одно решение $x \in \mathcal{O}_X(u_0)$, $x \not\succeq \omega$. Согласно предположению (1.4) существует $z \in X$, такой что $z \preceq \omega$, $z \preceq x$, $f(z) \succeq y$. Если $z = \omega$, то $\omega \preceq x$, а это не верно, следовательно $z \neq \omega$, то есть $z \prec \omega$. Согласно теореме 1 в множестве $\mathcal{O}_X(z) \subset \mathcal{O}_X(u_0)$ существует решение ξ уравнения (2), $\xi \preceq z \prec \omega$, а это противоречит тому, что ω минимальное решение. $\square$

2. Теорема об упорядоченном накрывании оператора Немыцкого

Для изучения неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нам потребуется утверждение об упорядоченном накрывании оператора Немыцкого. Оно открывает возможность применения теоремы 1 и ее следствия к различным функциональным, в том числе, дифференциальным уравнениям.

Обозначим через $W \doteq W([a,b], \mathbb{R}^m)$ пространство измеримых функций $x: [a,b] \to \mathbb{R}^m$; через $L_\infty \doteq L_\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$ пространство существенно ограниченных функций $x: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\| = \mathrm{vrai}\ \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall x \in L_\infty.$$

Для множества $B \subset \mathbb{R}^n$ обозначим $L_\infty(B) \doteq L_\infty([a,b],B)$ подмножество пространства L_∞, содержащее функции со значениями $x(t) \in B,\ t \in [a,b]$. В перечисленных пространствах измеримых функций определим порядок, полагая для их элементов x, u выполненным неравенство $x \le u$, если $x(t) \le u(t)\ \ \dot{\forall}\ \ t \in [a,b]$ (символ $\dot{\forall}$ означает "при почти всех").

Рассмотрим функцию $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Пусть она удовлетворяет условиям Каратеодори (т. е. по первому аргументу измерима, а по второму непрерывна). Данные предположения позволяют определить оператор Немыцкого, действующий в пространствах измеримых функций, равенством

$$(N_f x)(t) = f\big(t, x(t)\big),\ t \in [a,b].$$

Установим связь между свойствами упорядоченного накрывания функции f по второму аргументу и оператора Немыцкого.

Пусть задано $r \ge 0$. Обозначим через f_r сужение функции f на множество $[a,b] \times B$, где множество $B = B_{\mathbb{R}^n}(0,r)$ теперь шар в конечномерном пространстве с центром в 0 и радиуса r. Определим соответствующий оператор Немыцкого

$$N_{f_r} : L_\infty(B) \to W,\ (N_{f_r} x)(t) = f_r\big(t, x(t)\big),\ t \in [a,b].$$

Пусть задана измеримая функция $y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$.

Т е о р е м а 2. *Если при почти всех* $t \in [a,b]$ *функция* $f_r\big(t,\cdot\big) : B \to \mathbb{R}^m$ *упорядоченно накрывает одноточечное множество* $V(t) = \{y(t)\} \subset \mathbb{R}^m$, *то соответствующий оператор Немыцкого* $N_{f_r}\ :\ L_\infty(B) \to W$ *упорядоченно накрывает множество* $V = \{y(\cdot)\} \subset W$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u \in L_\infty(B)$ такой, что $(N_{f_r} u) \ge y$. Это неравенство означает, что $f_r\big(t, u(t)\big) \ge y(t)\ \dot{\forall} t \in [a,b]$. Так как $f_r\big(t,\cdot\big)$ упорядоченно накрывает одноточечное множество $\{y(t)\}$, то $y(t) \in f_r\big(t, U(t)\big)\ \dot{\forall} t \in [a,b]$, где $U(t) = \mathcal{O}(u(t)) \bigcap B$.

По теореме Филиппова (см. п. 1.5.2. [15]), существует измеримая функция $\bar{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ такая, что $\bar{x}(t) \in U(t)$, $f_r\big(t, \bar{x}(t)\big) = y(t)\ \dot{\forall} t \in [a,b]$. Таким образом, имеет место соотношения $(N_{f_r}\bar{x}) = y$ и $\bar{x} \in L_\infty(B)$. □

3. Неявные дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом

Здесь на основании теорем 1, 2 получены утверждения о существовании и оценке решения неявного дифференциального уравнения с запаздыванием.

Обозначим $AC_\infty \doteq AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ — пространство таких абсолютно непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, что $x' \in L_\infty$; $AC_\infty\big(B\big) \doteq AC_\infty\big([a,b],B\big)$ — подмножество AC_∞, содержащее функции $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, производная которых $x'(t) \in B\ \dot{\forall} t \in [a,b]$, где $B \subset \mathbb{R}^n$ – заданное множество.

Пусть заданы функции $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ и вектор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения вида:

$$f(t, x(h(t)), x'(t)) = 0,\ t \in [a,b],\ x(s) = 0,\ \textit{если } s \notin [a,b] \tag{5}$$

с начальным условием

$$x(a) = \gamma. \tag{6}$$

Решением этого уравнения будем считать функцию $x \in AC_\infty$, удовлетворяющую этому уравнению при почти всех $t \in [a,b]$.

Т е о р е м а 3. *Пусть для некоторой функции* $v_0 \in AC_\infty$ *имеют место неравенства*

$$v_0(a) \ge \gamma, \quad \dot{\forall} t \in [a,b] \quad f\big(t, v_0(h(t)), v_0'(t)\big) \ge 0. \tag{7}$$

Пусть выполнены условия:

(3.1) *функция* $f(\cdot,x,u):[a,b]\to\mathbb{R}^m$ *измерима при любых* $x,u\in\mathbb{R}^n$, *функция* $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ *измерима;*

(3.2) *при почти всех* $t\in[a,b]$ *и любых* $u\in\mathbb{R}^m$ *функция* $f(t,\cdot,u):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *по каждому аргументу* $x_1,\ldots,x_n$ *не возрастает и непрерывна справа;*

(3.3) *при почти всех* $t\in[a,b]$ *и любых* $x\in\mathbb{R}^m$ *функция* $f(t,x,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *непрерывна;*

(3.4) *сужение* $f_r(t,x,\cdot):B\to\mathbb{R}^m$ *функции* $f(t,x,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *на шар* $B\doteq B_{\mathbb{R}^n}(0,r)$ *с центром в* 0, *некоторого радиуса* $r\geq \operatorname{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}|v_0'(t)|_{\mathbb{R}^n}$ *упорядоченно накрывает одноточечное множество* $V=\{0\}\subset\mathbb{R}^m$ *при всех* $x\in\mathbb{R}^n$ *и почти всех* $t\in[a,b]$.

Тогда существует решение $x\in AC_\infty$ *задачи (5),(6), удовлетворяющее неравенствам*

$$x'(t)\leq v_0'(t),\ |x'(t)|\leq r\ \dot\forall t\in[a,b].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $f_r:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times B\to\mathbb{R}^m$ – сужение исходной функции f. Определим отображения:

$$S_h:AC_\infty\to L_\infty,\ (S_hx)(t)=\begin{cases}x(h(t)), & \text{если } h(t)\in[a,b],\\ 0, & \text{если } h(t)\notin[a,b];\end{cases}$$

$$N_{f_r}:L_\infty(B)\times L_\infty(B)\to W,\ (N_{f_r}(y,x))(t)=f(t,x(t),y(t)),\ t\in[a,b].$$

Тогда задача (5), (6) записывается в виде уравнения

$$N_f\Big(y,S_h\big(\gamma+\int\limits_a^{(\cdot)}y(s)ds\big)\Big)=0 \tag{8}$$

относительно неизвестного $y\in L_\infty$. Задача (5), (6) при дополнительном ограничении $x'(t)\in B$ равносильна уравнению (8), так как, если $x\in AC_\infty(B)$ является решением (5), (6), то $y=x'\in L_\infty(B)$ является решением (8). Верно и обратное, если y – решение (8), то $x=\gamma+ + \int\limits_a^{(\cdot)}y(s)ds$ – решение (5), (6).

Для доказательства теоремы 3 проверим выполнение условий теоремы 1 для отображения

$$\Upsilon:L_\infty(B)\times L_\infty(B)\to W,\ \Upsilon(y,u)=N_{f_r}\Big(y,S_h\big(\gamma+\int\limits_a^{(\cdot)}y(s)ds\big)\Big).$$

1) Из (7) получаем $\Upsilon(v_0',v_0')\geq 0$, т. е. выполнено (1) с $u_0=v_0'\in L_\infty(B)$.

2) Из условия (3.4) и теоремы 2, получаем, что $\Upsilon(\cdot,u)$ упорядоченно накрывает множество $\{0\}\in W$ при любом $u\in L_\infty(B)$. Таким образом, выполнено предположение (1.1) теоремы 1.

3) Вследствие (3.2) при почти всех $t\in[a,b]$ отображение $f_r(t,\cdot,u_1(t)):B\to\mathbb{R}^m$ является антитонным для любого $u_1\in L_\infty(B)$. Тогда отображение $\Upsilon(u_1,\cdot):L_\infty(B)\to W$ антитонное, и условие (1.2) теоремы 1 выполнено.

4) Рассмотрим цепь $S\subset L_\infty(B)$ такую, что для любого $u\in S$ выполнено $\Upsilon(u,u)\geq 0$. Ограниченная снизу цепь S имеет нижнюю границу, обозначим ее $\underline{u}$ и выделим из цепи убывающую последовательность $\{u_n\}\subset S$, имеющую такую же нижнюю границу (см. [16]; гл. IV, §12, следствие 7), то есть $\inf\{u_n\}=\inf S=\underline{u}$. Следовательно, при п.в. $t\in[a,b]$ справедливо $\underline{u}(t)=\inf\{u_n(t)\}=\lim_{n\to\infty}u_n(t)$. Отсюда, так как $\big(\Upsilon(u_n,u_n)\big)(t)\geq 0$, $n=1,2,\ldots$, почти всюду

на $[a,b]$, то вследствие предположений (3.2), (3.3) получаем $\big(\Upsilon(\underline{u},\underline{u})\big)(t)\geq 0,\ \ t\in[a,b]$. Итак, условие (1.3) теоремы 1 также выполнено.

Таким образом, из теоремы 1 следует, что существует решение $x\in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ задачи (5),(6), удовлетворяющее неравенству $x'(t)\leq v_0'(t),\ |x'(t)|\leq r$ для $\dot{\forall} t\in[a,b]$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чаплыгин С.А.* Основания нового способа приближённого интегрирования дифференциальных уравнений. М., 1919 (Собрание сочинений I. Гостехиздат, 1948. С. 348–368).

2. Избранные труды Н.В. Азбелева / отв. ред. В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. Москва; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2012. 808 с.

3. *Булгаков А.И.* О колеблемости решений систем дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 2. С. 204–217.

4. *Пеньков В.Б., Жуковская Т.В., Саталкина Л.В.* О разрешимости и оценках решений дифференциального уравнения с запаздыванием, зависящим от искомой функции // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 3. С. 748–751.

5. *Жуковский Е.С.* Об интегральных неравенствах в пространствах суммируемых функций // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 4. С. 580–584.

6. *Жуковский Е.С.* Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах // Математический сборник. 2004. Т. 195. № 9. С. 3–18.

7. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1605–1621.

8. *Жуковская Т.В., Забродский И.А., Серова И.Д.* О функциональных неравенствах // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 1963–1968.

9. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179. №1. P. 13–33. DOI: 10.1016/j.topol.2014.08.013

10. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. V. 201. P. 330–343.

11. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. №5. С. 475–478.

12. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады академии наук. 2013. Т. 453. №6. С. 595–598.

13. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 448 с.

14. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.

15. *Борисович Ю.Г.,Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 224 с.

16. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 896 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-680975).

Поступила в редакцию 14 апреля 2017 г

Серова Ирина Дмитриевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, студент, институт математики, естествознания и информационных технологий, e-mail: irinka _ 36@mail.ru

UDC 517.922, 517.988.6
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-571-578

ABOUT IMPLICIT DIFFERENTIAL INEQUALITIES WITH DEVIATING ARGUMENT

© **I. D. Serova**

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: irinka _ 36@mail.ru

Assertion about existence and evaluation of solutions to equations $\Upsilon(x,x)=y$, where the mapping Υ acting in partially ordered spaces is covering by the first argument and antitone by the second argument is derived. This result is used for the proof of the Chaplygin's type theorem on differential inequality with deviating argument.
Key words: orderly covering mappings; differential equation with deviating argument; the Cauchy problem; Chaplygin's type inequality

REFERENCES

1. *Chaplygin S.A.* Osnovaniya novogo sposoba priblizhyonnogo integrirovaniya differencial'nyh uravnenij. M., 1919 (Sobranie sochinenij I. Gostekhizdat, 1948. S. 348–368).

2. Izbrannye trudy N.V. Azbeleva / otv. red. V.P. Maksimov, L.F. Rahmatullina. Moskva; Izhevsk: In-t komp'yuter. issled., 2012. 808 s.

3. *Bulgakov A.I.* O koleblemosti reshenij sistem differencial'nyh uravnenij vtorogo poryadka // Differencialnye uravneniya. 1987. T. 23. № 2. S. 204–217.

4. *Penkov V.B., Zhukovskaja T.V., Satalkina L.V.* About solvability and solutions estimates for differential equation with delay depending on required function // Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2011. V. 16. Iss. 3. P. 748–751.

5. *Zhukovskiy E. S.* Integral equations in spaces of symmetric functions // Differential Equations. 1982. V. 18. № 4. P. 580–584.

6. *Zhukovskiy E. S.* Volterra inequalities in function spaces // Sbornik: Mathematics. 2004. V. 195. № 9. P. 3–18.

7. *Zhukovskiy E. S.* On Ordered-Covering Mappings and Implicit Differential Inequalities // Differential Equations. 2016. V. 52. № 12. P. 1605–1621.

8. *Zhukovskaya T.V., Zabrodskiy I.A., Serova I.D.* On functional inequalities // Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2016. V. 21. Iss. 6. P. 1963–1968.

9. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33. DOI: 10.1016/j.topol.2014.08.013

10. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. V. 201. P. 330–343.

11. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* On coincidence points of mappings in partially ordered spaces // Doklady Mathematics. 2013. V. 453. № 5. P. 475–478.

12. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points of set-valued mappings in partially ordered spaces // Doklady Mathematics. 2013. V. 453. № 6. P. 595–598.

13. *Kollatc L.* Funkcionalnii analiz i vichislitelnaya matematika. M.: Mir, 1969. 448 s.

14. *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* Elementi teorii funkcii i funkcionalnogo analiza. M.: Nauka, 1981. 544 s.

15. *Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Mishkis A.D., Obuhovskii V.V.* Vvedenie v teoriyu mnogoznachnih otobrajenii i differencialnih vklyuchenii. M.: LIBROKOM, 2011. 224 s.

16. *Danford N., Shvarc Dj.* Lineinie operatori. T. 1. Obschaya teoriya. M.: IL, 1962. 896 s.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 17-41-680975).

Received 14 April 2017

Serova Irina Dmitrievna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Student, Institute Mathematic, Natural Sciences and Information Technologies, e-mail: irinka _ 36@mail.ru

Информация для цитирования:

Серова И.Д. О неявных дифференциальных неравенствах с отклоняющимся аргументом // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 3. С. 571–578. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-571-578

Serova I.D. O nejavnyh differencial'nyh neravenstvah s otklonjayush'imsja argumentom [About implicit differential inequalities with deviating argument]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 571–578. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-571-578 (In Russian)