

УДК 517.977  
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-481-488

## РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА ДИНАМИКИ МНОГОФАЗНОЙ СРЕДЫ В СЕТЕПОДОБНОЙ ГИДРОСИСТЕМЕ ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

© О.Р. Балабан, А.В. Иванов

Работа посвящена вопросам построения разностной схемы для численного анализа процесса переноса многофазных сред в гидросистемах сетеподобного типа и базируется на анализе начально-краевых задач для дифференциальных систем с распределенными параметрами на сетях или сетеподобных областях. Представлены общие подходы к построению разностной схемы для ламинарного и турбулентного движений среды, исследуются ее свойства: аппроксимация, устойчивость, сходимость.

*Ключевые слова:* дифференциальная система; распределенные параметры на сетеподобных областях; разностная схема; устойчивость; сходимость.

**1. Введение.** Работа продолжает исследования, приведенные в [1–3], и посвящена общему описанию метода конечных разностей и некоторых принципов построения сходящихся разностных схем динамики многофазных сред с распределенными параметрами на сети или сетеподобных областях. Этот метод состоит в сведении начально-краевой задачи к системе алгебраических уравнений, неизвестными которой являются значения сеточных функций, и последующему изучению предельного перехода, когда длины сторон ячеек сетки стремятся к нулю. Принципиальным отличием от классических схем является аппроксимация начально-краевой задачи в слабом смысле, что позволяет рассматривать уравнения с коэффициентами, имеющими не более счетного числа разрывов-скачков. При этом обобщенное решение с конечной энергетической нормой определяется как предел слабо сходящейся последовательности приближений в энергетическом пространстве [4–6].

**2. Постановка задач и формулировка основных результатов.** Численный анализ прикладных задач переноса многофазных сред в различного вида гидросистемах сетеподобного типа носит фрагментарный характер, т. к. сопряжен с исследованием начально-краевых задач для дифференциальных систем с распределенными параметрами на сетях или сетеподобных областях [2–3]. Ниже представлены подходы к исследованию таких задач для двух базовых случаев ламинарного и турбулентного движения среды. Используемые подходы обладают достаточно большой общностью и применимы к различным видам гидросетей.

**2.1. Ламинарные потоки (линейный случай).** Ламинарный характер течений обусловлен соотношением диаметра и длины каналов гидроносителя: диаметр много меньше длин всех элементов гидросистемы. Конструктивные особенности таковых сетей, как правило, исключают турбулентный характер динамики течений (либо турбулентностями можно пренебречь). Последнее означает, что осевое изменение характера

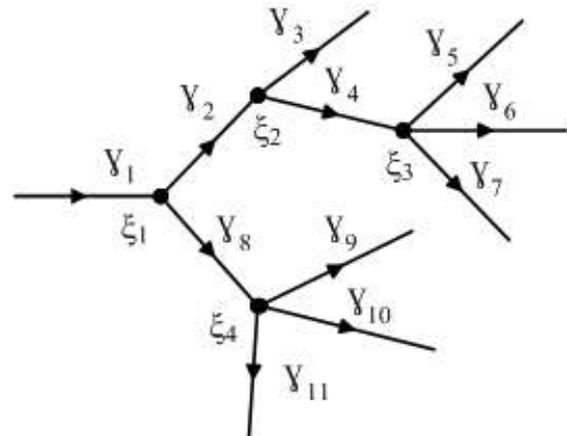


Рис. 1. Фрагмент гидросети

течения представляет наиболее информативную составляющую гидродинамики течения; таким образом, достаточно интерпретации линейных фрагментов гидросистемы одномерными континуумами, параметризованными одномерной переменной  $x$  пространства  $\mathcal{R}^1$  (рис. 1).

Математическое описание процесса ламинарного течения в сетеподобной гидросистеме (функция  $u(x,t)$  описывает скорость течения,  $p(x,t)$  – давление в гидросистеме) использует линеаризованную систему Навье–Стокса, аналогичную уравнениям передачи масс с распределенными параметрами на сети

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Psi u + \Phi p = 0, u|_{t=0} = u_0(x) \quad (1)$$

с условиями согласования в узлах сопряжения линейных фрагментов гидросистемы (2), где

$$\Psi u(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + b(x)u(x,t),$$

$$\Phi p(x,t) = \frac{\partial p(x,t)}{\partial x},$$

(здесь  $a(x)$ ,  $b(x)$  – коэффициенты, характеризующие динамику процесса). К системе (1) следует присоединить соотношение, описывающее краевые условия (5), и соотношения, устанавливающие связь гидродинамических процессов с температурой среды (6), (7).

Для математического описания гидродинамического процесса в гидросистеме рассмотрим интерпретирующую ее геометрическую сеть  $\Gamma$  с ребрами  $\gamma$  (соответствуют линейным фрагментам гидросистемы) и введем следующие обозначения (работы В.В. Провоторова, А.С. Волковой, Ю.А. Гнилицкой [4; 6–8]):  $\partial\Gamma$  – множество граничных узлов  $\zeta$  (соответствуют входам в гидросистему),  $J(\Gamma)$  – множество внутренних  $\xi$  узлов (соответствуют узлам ветвления гидросистемы) и пусть  $\Gamma_0$  – объединение всех ребер, не содержащих концевых точек,  $\partial\mathfrak{R}$  – множество всех граничных ребер (ребер, содержащих граничные узлы  $\zeta \in \partial\Gamma$ ;  $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$  ( $\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0, t)$ ),  $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0, T)$  ( $\partial\Gamma_t = \partial\Gamma \times (0, t)$ ). Каждое ребро  $\gamma$  сети  $\Gamma$  ориентировано, параметризуется отрезком  $[0, 1]$  и переменной  $x \in [0, 1]$ . Подробные описания используемых пространств приведены в [7]), здесь же по мере необходимости представлены только их общие свойства.

Основным пространством допустимых состояний  $u(x,t)$  динамики ламинарного течения является пространство  $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$ , элементы которого суть непрерывные по переменной  $t$  и суммируемые по пространственной переменной  $x$  функции  $u(x,t)$  с обобщенной производной  $u_x(x,t) \in L_2(\Gamma_T)$ , причем для них справедливы условия согласования

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)\gamma_j \frac{\partial u(1,t)_{\gamma_j}}{\partial x} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)\gamma_j \frac{\partial u(0,t)_{\gamma_j}}{\partial x}, \quad (2)$$

(здесь  $R(\xi)$  – множество ребер, ориентированных «к узлу  $\xi$ »,  $r(\xi)$  – множество ребер, ориентированных «от узла  $\xi$ »), и нулевые условия в граничных узлах:

$$u(x,t)|_{\partial\Gamma} = 0.$$

Рассматривается базирующаяся на системе (1) математическая модель динамики многофазной среды в гидросети для несжимаемой вязкой многофазной жидкости в терминах формализмов начально-краевой задачи в области  $\overline{\Gamma_T} = \Gamma \times [0, T]$ :

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right) + b(x)y(x,t) + \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = f(x,t), \quad (3)$$

$$y|_{t=0} = y_0(x), \quad x \in \Gamma. \quad (4)$$

Коэффициенты  $a(x)$  и  $b(x)$ , характеризующие внутренние свойства текущей среды (плотность, вязкость и пр.), являются фиксированными измеримыми ограниченными на  $\Gamma_0$  функциями, суммируемые с квадратом; соотношения (2) – условия согласования (баланс потоков в узле  $\xi$ ) во всех внутренних узлах гидросети; соотношения (4) – начальные условия; краевые условия определяются соотношениями

$$y|_{\partial\Gamma_T} = 0. \quad (5)$$

**Замечание 1.** Наличие функции  $f(x,t)$  в правой части (3) обусловлено использованием при анализе однородных краевых условий (5) для описания пространств решений системы (1) для неоднородной исходной задачи относительно функции  $u(x,t)$  с нулевой правой частью в первом уравнении (1) и ненулевым краевым условием  $u|_{x \in \partial\Gamma} = \psi(x,t)$ ; аддитивная замена  $y = u - \psi$  переводит неоднородность из краевого условия в правую часть уравнения (3).

В неизотермических условиях к соотношениям (3)–(5) следует присоединить уравнение теплопереноса

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - y \frac{\partial T}{\partial x} + f_T(x,t) \quad (6)$$

с добавленными для скалярной функции  $T(x,t)$  начальным

$$T(x,0) = T_0(x) \quad (7)$$

и краевыми

$$T|_{\partial\Gamma} = 0 \quad (8)$$

условиями. Здесь  $\alpha$  – коэффициент теплопроводности среды.

Соотношения (3)–(8) являются математической моделью динамики многофазной среды в сетеподобной гидросистеме при неизотермических условиях (см. также замечание 1).

**Замечание 2.** Следует отметить, что отыскание решения начально-краевой задачи (3)–(5) никак не связано с наличием решения начально-краевой задачи (6)–(8), что обуславливает введение понятия решения системы (8)–(13) как «разделенные» решения задач (3)–(5) и (6)–(8).

Пусть  $f(x,t), f_T(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$  и  $T_0(x) \in L_2(\Gamma)$  (элементами пространств  $L_{2,1}(\Gamma_T)$  и  $L_2(\Gamma)$  являются суммируемые на  $\Gamma_T$  и  $\Gamma$  функции соответственно).

**Определение 1.** Слабым решением [3] начально-краевой задачи (3)–(8) называется пара  $\{y(x,t), T(x,t)\}$ ,

$y(x,t) \in V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$ ,  $T(x,t) \in W_{2,0}^1(\Gamma_T)$  где функция  $y(x,t)$  удовлетворяет соотношению

$$\int_{\Gamma} y(x,t)\eta(x,t)dx - \int_{\Gamma_T} y(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}dxdt + \ell_t(y,\eta) + \int_{\Gamma_T} p(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x}dxdt = \int_{\Gamma} y_0(x)\eta(x,0)dx + \int_{\Gamma_T} f(x,t)\eta(x,t)dxdt, \quad (9)$$

а функция  $T(x,t)$  – соотношению

$$\int_{\Gamma_t} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \eta(x,t) dxdt + \Theta_t(T, \eta) + \int_{\Gamma_t} p(x,t) \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} dxdt = \int_{\Gamma_t} f_T(x,t) \eta(x,t) dxdt, \quad (10)$$

$$T(x,0) = T_0(x)$$

для любых  $\eta(x,t), \zeta(x,t) \in W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$  и при любом  $t \in [0, T]$ ; здесь  $W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$  пространство суммируемых функций с суммируемыми обобщенными производными  $\eta_t$  и  $\eta_x$ ,  $\ell_t(y, \eta)$ ,  $\Theta_t(T, \eta)$  – билинейные формы вида

$$\ell_t(y, \eta) = \int_{\Gamma_t} (a(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} + b(x) y(x,t) \eta(x,t)) dxdt,$$

$$\Theta_t(T, \eta) = \alpha \int_{\Gamma_t} (\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} + y(x,t) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \eta(x,t)) dxdt.$$

Имеют место следующие утверждения, полное доказательство которых приведено в работах [6; 8].

**Теорема 1.** Начально-краевая задача (3)–(5) имеет единственное слабое решение  $\{y(x,t), T(x,t)\}$ , непрерывно зависящее от исходных данных  $f(x,t)$  и  $y_0(x)$ .

**Теорема 2.** Начально-краевая задача (6)–(8) имеет единственное слабое решение  $T(x,t) \in V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$ , непрерывно зависящее от исходных данных  $f_T(x,t)$  и  $T_0(x)$ .

**Теорема 3.** Начально-краевая задача (3)–(8) имеет единственное слабое решение  $T(x,t) \in W_{2,0}^1(\Gamma_T)$ , непрерывно зависящее от исходных данных  $f(x,t)$ ,  $f_T(x,t)$  и  $y_0(x)$ ,  $T_0(x)$ , т. е. является корректной по Адамару.

**Замечание 3.** Утверждение теоремы 3 лежит в основе анализа задач оптимизации дифференциальных систем (3), (6), к которым относятся, например, задачи граничной и стартовой оптимизации [4; 6].

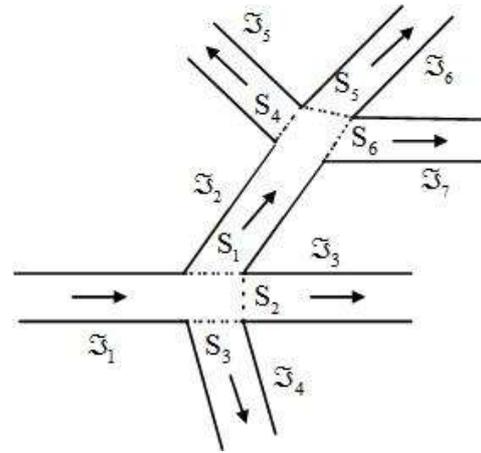


Рис. 2. Фрагмент сетеподобной гидросистемы

**2.2. Турбулентные потоки (нелинейный случай).**

Рассмотрим, далее, математическую модель динамики вязких турбулентных потоков в пространственных сетеподобных гидропроводах (рис. 2). Все рассмотренные для сохранения общности подхода проводятся для сетеподобных областей евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  произвольной размерности  $n$  (в конкретных ситуациях чаще всего используются случаи  $n = 2$  или  $n = 3$ ). Понятие «сетеподобная область» подразумевает конструкцию, построенную из областей по принципу вышеприведенной сети (см. п. 2.1), а именно: каждая область сопрягается частью своей границы с другой областью (другими областями) в узловых местах, аналогичным внутренним узлам сети.

Для дифференциальной системы, рассматриваемой в сетеподобной области  $\mathfrak{Z}_T = \mathfrak{Z} \times [0, T]$  ( $\overline{\mathfrak{Z}_T} = (\mathfrak{Z} \cup \partial\mathfrak{Z}) \times [0, T]$ ), введем следующие обозначения [14]. Пусть  $\mathfrak{Z}$  – открытая область пространства  $\mathbb{R}^n$  с границей  $\partial\mathfrak{Z}$ , имеющая сетеподобную структуру, состоящую из областей  $\mathfrak{Z}_k : \mathfrak{Z} = \bigcup_k \mathfrak{Z}_k \cup S_1$  (рис. 4), поверхности  $S_1$  отделяют области  $\mathfrak{Z}_k$  друг от друга,  $S_1^-$  и  $S_1^+$  – односторонние поверхности для  $S_1$ , определяемые направлением нормалей  $n_1^-, n_1^+$  к ним) и пусть  $(0, T)$  ( $T < \infty$ ) – интервал в  $\mathbb{R}^1$ . Для рассматриваемого случая используются аналогичные приведенным выше пространства, где обозначение сети  $\Gamma$  заменено на обозначение сетеподобной области  $\mathfrak{Z}$ , а соотношения (2) принимают следующий вид:

$$u|_{s^-} = u|_{s^+}, \sum_i \frac{\partial u}{\partial n_i^-} \Big|_{s^-} + \sum_i \frac{\partial u}{\partial n_i^+} \Big|_{s^+} = 0, u|_{\partial\mathfrak{Z}} = 0,$$

$$\operatorname{div} u = 0.$$

Рассмотрим дифференциальную систему и ей соответствующую начально-краевую задачу в замкнутой области  $\overline{\mathfrak{Z}_T}$  для вектор-функции  $Y(x,t) \in V_{2,0}^{1,0}(S_1, \mathfrak{Z}_T)$ :

$$\frac{\partial Y(x,t)}{\partial t} - \Delta Y(x,t) + \sum_{i=1}^n Y_i(x,t) \frac{\partial Y(x,t)}{\partial x_i} + \text{grad}p(x,t) = F(x,t), \quad (11)$$

$$\text{div}Y = 0, \quad (12)$$

$$Y(x,0) = Y_0(x), x \in \mathfrak{S}, \quad (13)$$

$$Y|_{\partial\mathfrak{S}_T} = 0. \quad (14)$$

Соотношения (11), (12) образуют систему уравнений Навье–Стокса относительно вектор-функции  $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ , характеризующей течение несжимаемой (соотношение (12)) вязкой ( $\nu$  – коэффициент вязкости) многофазной среды в сетеподобной замкнутой области  $\overline{\mathfrak{S}_T}$  с постоянным давлением  $p(x,t)$ ;  $\Delta$  – оператор Лапласа; вектор-функция  $Y(x,t)$  определяет скорости перемещения среды по всем координатным направлениям;  $f(x,t) \in L_2(\partial\mathfrak{S}_T)$ ,  $Y_0(x) \in L_2(\mathfrak{S})$  – заданные функции (исходные данные).

В неизотермических условиях к соотношениям (11)–(14) следует присоединить уравнение теплопереноса для скалярной функции  $T(x,t)$ , описывающей тепловое поле многофазной среды. Для этого введем пространство  $V_{2,0}^{1,0}(S_1, \mathfrak{S}_T)$  скалярных функций  $v(x,t)$  по аналогии с пространством  $V_{2,0}^{1,0}(S_1, \mathfrak{S}_T)$  (в описании множества  $\Omega(\mathfrak{S}_T)$  отсутствует соотношение  $\text{div}u = 0$ ). Функция  $T(x,t) \in v_{2,0}^{1,0}(S_1, \mathfrak{S}_T)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \Delta T - (Y, \text{grad}T) + F_T(x,t) \quad (15)$$

с добавленными начальными

$$T(x,0) = T_0(x) \in L_2(\mathfrak{S}) \quad (16)$$

и краевыми

$$T(x,t)|_{\partial\mathfrak{S}_T} = 0 \quad (17)$$

условиями. Здесь  $\alpha$  – коэффициент теплопроводности многофазной среды,  $\text{grad}T$  характеризует температурные потоки вдоль координатных осей.

**Замечание 4.** Как и выше (замечание 1) наличие неоднородностей  $F(x,t)$  и  $F_T(x,t)$  в (11) и (15) обусловлено неоднородными краевыми условиями  $Y|_{\partial\mathfrak{S}_T} = Y_0(x,t)$  и  $T(x,t)|_{\partial\mathfrak{S}_T} = T_0(x,t)$  ( $Y_0(x,t), T_0(x,t)$  – заданные значения скоростей и начальной температуры среды при входе в гидросеть) и последующей заменой, приводящей эти неоднородные условия к однородным.

Введем следующие формы ( $\rho_1(u, \nu)$  – билинейная форма):

$$\rho_1(u, \nu) = \sum_{i,j=1}^n \int \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial \nu_j}{\partial x_i} dx,$$

$$\rho_2(u, \nu, \omega) = \sum_{i,j=1}^n \int u_k \frac{\partial \nu_j}{\partial x_k} \omega_i dx,$$

$$\rho_3(u, \nu, \mu) = \sum_{k=1}^n \int u_k \frac{\partial \nu}{\partial x_k} \mu$$

на вектор-функциях  $u, \nu, \omega$  и скалярных функциях  $\nu, \mu$  (при этом сходятся интегралы в представлении данных форм).

**Определение 2.** Турбулентным решением начально-краевой задачи (11)–(17) называется пара функций  $\{Y(x,t), T(x,t)\}$  ( $Y(x,t) \in V_{2,0}^{1,0}(S_1, \mathfrak{S}_T)$ ,  $T(x,t) \in W_{2,0}^1(S_1, \mathfrak{S}_T)$ ). При этом вектор-функция  $Y(x,t)$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} (Y, \eta) - \int_{\mathfrak{S}_T} Y(x, \tau) \frac{\partial \eta(x, \tau)}{\partial \tau} dx d\tau + \nu \int_0^t \rho_1(Y, \eta) d\tau + \\ + \int_0^t \rho_2(Y, Y, \eta) d\tau + (\text{grad}p, \eta) = \\ = (Y_0(x), \eta(x,0)) + \int_{\partial\mathfrak{S}_T} F(x, \tau) \eta(x, \tau) dx, d\tau \end{aligned}$$

для любых  $t \in [0, T]$  и любых вектор-функций  $\eta(x,t) \in W_2^1(S_1, \mathfrak{S}_T)$ , а скалярная функция  $T(x,t)$  – интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{S}_T} \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} \zeta(x, \tau) dx d\tau + \alpha \int_0^t \rho_1(T, \zeta) d\tau + \int_{\mathfrak{S}_T} \rho_3(Y, T, \zeta) dx d\tau = \\ = \int_{\partial\mathfrak{S}_T} F_t(x, \tau) \zeta(x, \tau) dx d\tau \end{aligned}$$

для любых  $t \in [0, T]$  и любых скалярных функций  $\zeta(x,t) \in W_2^1(S_1, \mathfrak{S}_T)$  (пространство  $W_2^1(S_1, \mathfrak{S}_T)$  строится по аналогии с  $W_{2,0}^{1,0}(S_1, \mathfrak{S}_T)$ )

**Теорема 4.** Начально-краевая задача (11)–(14) при указанных выше условиях имеет турбулентное решение  $Y(x,t) \in V_{2,0}^1(S_1, \mathfrak{S}_T)$ , непрерывно зависящее от исходных данных  $F(x,t)$  и  $Y_0(x)$ .

**Теорема 5.** Начально-краевая задача (15)–(17) имеет турбулентное решение  $T(x,t) \in V_{2,0}^{1,0}(S_1, \mathfrak{S}_T)$ , непрерывно зависящее от исходных данных  $F_T(x,t)$  и  $T_0(x)$ .

Доказательства утверждений представленных теорем приведены в работе [1].

**Следствие из теорем 4 и 5.** Начально-краевая задача (11)–(17) имеет турбулентное решение, непрерывно зависящее от исходных данных  $F(x, t)$ ,  $F_T(x, t)$  и  $Y_0(x)$ ,  $T_0(x)$ .

**3. Разностная схема численного анализа.** Для упрощения анализа остановимся на случае ламинарного потока (п. 2.1), случай турбулентного потока (п. 2.2) аналогичен.

Разобьем ребра  $\gamma$  сети  $\Gamma$  точками  $kh$  ( $k$  – натуральные числа,  $h > 0$  – фиксированное число, равное длине элементарного отрезка  $\omega_h$ , называемого ниже элементарной ячейкой ребра сети), при этом считаем, что внутренние узлы  $\xi \in J(\Gamma)$  графа входят в число таких точек. Множество точек  $\{kh\}$  назовем сеткой  $\Gamma$  и обозначим  $\Gamma^h$ . Для сеточных функций  $u_h$  (индекс  $h$  для упрощения записи иногда опускается), определенных на  $\Gamma^h$  и соответствующих функциям  $u(x)$ ,  $x \in \Gamma$ , введем разностные операции (разностные отношения)  $u_x(x) = \frac{1}{h}(u(x+h) - u(x))$ ,  $u_x(x) = \frac{1}{h}(u(x) - u(x-h))$  (правое и левое разностные отношения). Разностные операции от произведения сеточных функций имеют следующий вид:

$$(uv)_x(x) = u_x(x)v(x) + u(x+h)v_x(x) = u_x(x)v(x) + u(x+h)v_x(x+h),$$

$$(uv)_x(x) = u_x(x)v(x) + u(x-h)v_x(x) = u_x(x)v(x) + u(x-h)v_x(x-h).$$

Разностным аналогом формулы интегрирования по частям является формула

$$h \sum_{k=0}^{M-1} u_x(kh)v_h(kh) = -h \sum_{k=1}^M u_h(kh)v_x(kh) + u_h(Mh)v_h(Mh) - u_h(0)v_h(0),$$

здесь  $u_x, v_h$  – произвольные сеточные функции, заданные в точках  $kh, k = 0, 1, \dots, M$  ( $M$  – число всех точек сетки  $\Gamma^h$ , в прикладных задачах обычно  $h = 1/M$ ). Ниже для удобства чтения индекс  $k$  у сеточной функции  $u_h(k)$  указывает на то, что функция  $u_h$  берется на слое  $t = t_k$  ( $k = \overline{1, N}, N = [T/\tau]$ ).

Рассмотрим следующую разностную схему (в работе [6] приведена аналогичная):

$$u_t(k) - (a_h u_x(k))_x + b_h u(k) = f_h(k), \quad (18)$$

$$u_h(k)|_{\partial\Gamma^h} = 0, \quad (19)$$

$$u_h|_{t=0} = \Phi_h. \quad (20)$$

Разностные уравнения (18) должны выполняться на слоях  $t = t_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ) в точках сетки  $\Gamma^h$ ; равенства (19) выполняются для  $kh, k = 0, 1, \dots, M$ ; равенство (9) – в точках  $\Gamma^h$ . При этом в (20) сеточная функция  $\Phi_h$  в точке  $kh$  ячейки  $\omega_{kh}$  равна усредненной  $\Phi_h = \frac{1}{h} \int_{\omega_{kh}} \varphi(x) dx$ , взятому по ячейке  $\omega_{kh}$ . Аналогично

строятся сеточные функции  $a_h$  и  $b_h$ . Сеточная функция  $f_h(k)$  строится по заданной функции  $f$  в соответствии с соотношением (усреднение)  $f_h|_{x=kh, t=k_0\tau} = \frac{1}{h\tau} \int_{\Gamma_T(k, k_0)} f(x, t) dx dt$ , где  $\Gamma_T(k, k_0) = \omega_{kh} \times (k_0\tau, (k_0+1)\tau)$ .

Для каждого слоя  $t = t_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ) разностная схема (18)–(20) являет собой линейную систему алгебраических уравнений, однозначно разрешимую для всех  $\tau < \tau_0$ , где  $\tau_0 > 0$  – некоторое фиксированное число. Соотношения (18), (19) эквивалентны тождествам

$$\sum_{\Gamma_+^h} (u_t \eta_h + a_h u_x \eta_x + b_h u_h \eta_h) = \sum_{\Gamma_+^h} f_h \eta_h, \quad (21)$$

которые выполняются на всех слоях  $t = t_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ) и в которых  $\eta_h$  – произвольная сеточная функция  $\Gamma^h$ , равная нулю  $\partial\Gamma^h$ .

**Теорема 6.** Система (18), (19) при  $\tau < \tau_0$  (значение  $\tau_0$  указано ниже) однозначно разрешима на слое  $t = t_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ) при любых  $f_h(k)$ .

*Доказательство.* На произвольном слое  $t = t_k$  возьмем однородную систему, соответствующую системе (18), (19), или, что то же, тождество (21), где  $f_h$  и  $u_{k-1}$  ( $u_{k-1}$  входит в выражение  $u_t(k)$ ) заменены нулями. Положив в этом тождестве  $\eta_h = u_h$ , получим равенство  $\sum_{\Gamma_+^h} (\frac{1}{\tau} u_h^2 + a_h u_x^2 + b_h u_h^2) = 0$ . В силу оценок

для функций  $a(x)$  и  $b(x)$  из него вытекает  $\sum_{\Gamma_+^h} \frac{1}{\tau} u_h^2 \leq \sum_{\Gamma_+^h} (\frac{1}{\tau} u_h^2 + a_h u_x^2) \leq \sum_{\Gamma_+^h} (b_h u_h^2) \leq \sum_{\Gamma_+^h} (b^* u_h^2)$ .

При  $1/\tau > b^*$  ( $\tau < 1/b^* = \tau_0$ ) из полученной оценки следует  $u_h(k) \equiv 0$ .

**Теорема 7.** Разностная схема (18), (19) устойчива.

*Доказательство.* Положим в (21)  $\eta_h = 2\tau u_h(k)$  и воспользуемся соотношением  $2\tau u_t(k) u_h(k) = u_h^2(k) - u_h^2(k-1) + \tau^2 u_t^2(k)$ , а также неравенствами

для функций  $a(x)$  и  $b(x)$ , которые остаются справедливыми и для их усреднений. Получим

$$\begin{aligned} & \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)}^2 - \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k-1)}^2 + \tau^2 \|u_t\|_{2,\Gamma_+^h(k)}^2 + \\ & + 2\tau a_* \|u_x\|_{2,\Gamma_+^h(k)}^2 \leq -2\tau \sum_{\Gamma_+^h(k)} b_h u_h^2 + \sum_{\Gamma_+^h(k)} f_h u_h \leq \\ & \leq 2\tau b^* \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)}^2 + 2\tau \|f_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)} \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)}. \end{aligned}$$

Здесь  $\|f_h\|_{2,\Gamma_+^h} = \sqrt{h \sum_{\Gamma_+^h} f_h^2}$ ,  $\|u_x\|_{2,\Gamma_+^h} = \sqrt{h \sum_{\Gamma_+^h} u_h^2}$ ,

$$\|u_h\|_{2,\Gamma_+^h} = \sqrt{h \sum_{\Gamma_+^h} u_h^2}.$$

Из полученного неравенства следует

$$\begin{aligned} & \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)}^2 - \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k-1)}^2 \leq 2\tau b^* \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)}^2 + \\ & + 2\tau \|f_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)} \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)} \end{aligned}$$

и при последующем делении на  $\|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)} + \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k-1)}$  неравенство  $(1 - 2\tau b^*) \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)} \leq \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k-1)} + 2\tau \|f_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)}$ .

При  $\tau < 1/(2b^*)$  из этого рекуррентного соотношения для произвольного слоя  $t = t_k$  ( $k \geq 2$ ) окончательно получаем

$$\|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)} \leq C (\|f_h\|_{2,\Gamma_+^h} + \|f_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)}), \quad (22)$$

где  $C$  – постоянная, зависящая только от  $b^*$  и  $T$ . Неравенства (22) гарантируют устойчивость схемы (18), (19). Теорема доказана.

На основе неравенств (22) доказывается слабая сходимости в  $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$  задачи (6)–(8). Именно из тождеств (21) для слоев  $t = t_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ) следует тождество

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_T} (-\tilde{u}_t \tilde{\eta}_t + a_h \tilde{u}_x \tilde{\eta}_x + b_h \tilde{u}_h \tilde{\eta}_h) dx dt - \int_{\Gamma} \varphi \tilde{\eta}_h(0) dx = \\ & = \int_{\Gamma_T} f_h \tilde{\eta}_h dx dt \end{aligned} \quad (23)$$

(здесь через  $\tilde{v}$  обозначены кусочно-постоянные интерполяции сеточных функций  $v_h : \tilde{v}(x, t) = v_{kh, (k_0+1)\tau}$ ) при любой функции  $\eta_h(k)$ , равной нулю на  $\partial\Gamma^h$  при всех  $k$  и равной нулю на слое  $t = T$ . Предельный переход по  $h \rightarrow 0$  и  $\tau \rightarrow 0$  в (23) осуществляется, взяв в качестве  $\eta_h$  значения в точках сетки  $\Gamma_T^h$  какой-либо гладкой функции  $\eta(x, t)$ , равной нулю в окрестности боко-

вой поверхности цилиндра  $\Gamma_T$  и его верхнего основания. Таким образом, имеет место

**Теорема 8.** Пусть для начально-краевой задачи (6)–(8)  $\varphi(x) \in W_{2,0}^1(a, \Gamma)$ ,  $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ . Тогда разностная схема (18)–(20) однозначно определяет сеточную функцию  $u_h$  при всех  $\tau < 1/b^*$  и ее интерполяции при  $h \rightarrow 0$  и  $\tau \rightarrow 0$  слабо сходятся в  $L_2(\Gamma_T)$  к обобщенному решению  $u(x, t) \in W_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$  задачи (6)–(8), производные от интерполяции сходятся слабо в  $L_2(\Gamma_T)$  к  $\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \in L_2(\Gamma_T)$ .

**4. Заключение.** Следует отметить, что представленные выше идеи использованы ранее в работе [3], а также могут быть использованы при решении ряда смежных задач: оптимальное управление грузоперевозками в условиях мегаполиса, когда требуется учитывать переменную скорость движения в течение суток [9]; аппроксимация процессов специальных течений в реакторах вытеснения [10]; построение систем мониторинга и управления объектами повышенной сложности – от ядерных реакторов до мобильных роботов [11]. Представленные результаты аналогичны классическим исследованиям устойчивости дифференциальных системы и оптимизации [12–14].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балабан О.Р. Математическое описание динамики многофазной среды в сетеподобной гидросистеме при неизотермических условиях // Системы управления и информационные технологии. 2015. № 4.1 (62). С. 192-198.
2. Балабан О.Р., Гнилицкая Ю.А. Математическая модель каскадно-последовательного течения несжимаемой вязкой многофазной среды // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2015): сборник трудов 8 Междунар. конф., Воронеж, 21–26 сент. 2015 г. Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2015. С. 43-45.
3. Балабан О.Р., Гнилицкая Ю.А., Приходько И.В. Задача оптимизации динамики течения вязких многофазных сред в сетеподобных объектах // Заметки ученого. Ростов н/Д, 2015. № 1 (1). С. 156-161.
4. Provotorov V.V. Boundary control of a parabolic system with delay and distributed parameters on the graph // International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP). 2015. С. 126-128.
5. Podvalny S.L., Provotorov V.V. The questions of controllability of a parabolic systems with distributed parameters on the graph // International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP). 2015. С. 117-119.
6. Подвальный С.Л., Провоторов В.В. Стартовое управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. СПб., 2015. № 3. С. 126-142.
7. Волкова А.С., Провоторов В.В. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 3-18.
8. Гнилицкая Ю.А. Математическое моделирование и численное исследование процессов в сетеподобных объектах, описываемых эволюционными уравнениями: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2015.
9. Сергеев С.М. Математическое моделирование сети торговых предприятий // Вестник Воронежского государственного технического университета. Воронеж, 2012. Т. 8. № 1. С. 66-71.
10. Потапов Д.К. Непрерывная аппроксимация одномерного аналога модели Гольдшттика отрывных течений несжимаемой жидкости // Сибирский журнал вычислительной математики. 2011. Т. 14. № 3. С. 291-296.
11. Вермей Е.И., Сотникова М.В. Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10: Прикладная математика.

- тика. Информатика. Процессы управления. СПб., 2011. № 1. С. 117-134.
12. Александров А.Ю., Жабко А.П. Об асимптотической устойчивости решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2012. № 5. С. 3-12.
  13. Александров А.Ю., Жабко А.П. Об устойчивости решений одного класса нелинейных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2006. № 9. С. 3-14.
  14. Жабко А.П., Зараник У.П. О приближении решений экспоненциально устойчивых систем дифференциально-разностных уравнений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10: При-

кладная математика. Информатика. Процессы управления. СПб., 2011. Вып. 3. С. 29-38.

**БЛАГОДАРНОСТИ:** Работа выполнена в Военном учебно-научном центре Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» в 3-м научно-исследовательском отделе НИЦ.

Поступила в редакцию 18 марта 2016 г.

UDC 517.977

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-481-488

## DIFFERENCE SCHEME FOR THE NUMERICAL ANALYSIS OF MULTIPHASE FLUIDS IN HYDRAULIC NET-LIKE TYPE AT NONISOTHERMAL CONDITIONS

© O.R. Balaban, A.V. Ivanov

The work is devoted to questions of constructing a difference scheme for the numerical analysis of the migration process of multiphase fluids in hydraulic net-like type and is based on the analysis of the initial-boundary value problems for differential systems with distributed parameters on the network or net-like domains. We present a common approach to the construction of a difference scheme for laminar and turbulent motions of the medium, its properties are investigated: approximation, stability, convergence.

*Key words:* differential system; distributed parameters on the net-like domains; finite difference scheme; stability; convergence.

### REFERENCES

1. Balaban O.R. Matematicheskoe opisaniye dinamiki mnogofaznoy sredy v setepodobnoy gidrosisteme pri neizotermicheskikh usloviyakh. *Sistemy upravleniya i informatsionnyye tekhnologii*, 2015, no. 4.1 (62), pp. 192-198.
2. Balaban O.R., Gnilitkaya Yu.A. Matematicheskaya model' kaskadno-posledovatel'nogo techeniya neszhimaemoy vyzkoy mnogofaznoy sredy. *Sbornik trudov 8 Mezhdunarodnoy konferentsii "Sovremennyye metody prikladnoy matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternykh tekhnologiy (PMTUKT-2015)"*. Voronezh, Scientific Book Publishing House, 2015, pp. 43-45.
3. Balaban O.R., Gnilitkaya Yu.A., Prikhod'ko I.V. Zadacha optimizatsii dinamiki techeniya vyzkikh mnogofaznykh sred v setepodobnykh ob'ektakh. *Nauchno-prakticheskyy zhurnal «Zametki uchenogo»*, Rostov-on-Don, 2015, no. 1 (1), pp. 156-161.
4. Provotorov V.V. Boundary control of a parabolic system with delay and distributed parameters on the graph. *International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP)*, 2015, pp. 126-128.
5. Podvalny S.L., Provotorov V.V. The questions of controllability of a parabolic systems with distributed parameters on the graph. *International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP)*, 2015, pp. 117-119.
6. Podvalny S.L., Provotorov V.V. Startovoe upravlenie parabolicheskoy sistemoy s raspredelennymi parametrami na grafe. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Protsesty upravleniya*, St. Petersburg, 2015, no. 3, pp. 126-142.
7. Volkova A.S., Provotorov V.V. Obobshchennyye resheniya i obobshchennyye sobstvennyye funktsii kraevykh zadach na geometricheskom grafe. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, 2014, no. 3, pp. 3-18.
8. Gnilitkaya Yu.A. *Matematicheskoe modelirovaniye i chislennoye issledovaniye protsessov v setepodobnykh ob'ektakh, opisyvaemykh evolyutsionnyimi uravneniyami*. Avtoreferat dissertatsii ... kandidata fiziko-matematicheskikh nauk. Voronezh, 2015.
9. Sergeev S.M. Matematicheskoye modelirovaniye seti torgovykh predpriyatiy. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, Voronezh, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 66-71.
10. Potapov D.K. Nepreryvnaya approksimatsiya odnomernogo analoga modeli Gol'dshatika otryvnykh techeniy neszhimaemoy zhidkosti. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki*, 2011, vol. 14, no. 3, pp. 291-296.
11. Veremey E.I., Sotnikova M.V. Stabilizatsiya plazmy na baze prognoza s ustoychivym lineynym priblizheniem. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Protsesty upravleniya*, St. Petersburg, 2011, no. 1, pp. 117-134.
12. Aleksandrov A.Yu., Zhabko A.P. Ob asimptoticheskoy ustoychivosti resheniy odnogo klassa sistem nelineynykh differentsialnykh uravneniy s zapazdyvaniem. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, 2012, no. 5, pp. 3-12.
13. Aleksandrov A.Yu., Zhabko A.P. Ob ustoychivosti resheniy odnogo klassa nelineynykh sistem s zapazdyvaniem. *Avtomatika i telemekhanika*, 2006, no. 9, pp. 3-14.

14. Zhabko A.P., Zaranik U.P. O priblizhenii resheniy eksponentsial'no ustoychivyykh sistem differentsial'no-raznostnykh uravneniy. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya*, St. Petersburg, 2011, no. 3, pp. 29-38.

Received 18 March 2016

Балабан Олеся Руслановна, Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Российская Федерация, инженер 3-го научно-исследовательского отдела НИЦ, e-mail: bal-olesya@mail.ru

Balaban Olesya Ruslanovna, Air Force Academy named after professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin, Voronezh, Russian Federation, Engineer of 3<sup>rd</sup> Scientific-Research Centre Department of Scientific Research Centre, e-mail: bal-olesya@mail.ru

Иванов Алексей Владимирович, Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, начальник 3 научно-исследовательского отдела НИЦ, e-mail: bal-olesya@mail.ru

Ivanov Aleksey Vladimirovich, Air Force Academy named after professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin, Voronezh, Russian Federation, Candidate of Technics, Associate Professor, Head of 3<sup>rd</sup> Scientific-Research Centre Department of Scientific Research Centre, e-mail: bal-olesya@mail.ru