УДК 517.929

К ВОПРОСУ О ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИИ КОШИ СИНГУЛЯРНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

© **И.М. Плаксина**

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения; сингулярные уравнения; задача Коши; функция Коши; дифференциальные неравенства.
В работе рассмотрены сингулярные по независимой переменной функционально-дифференциальные уравнения первого порядка. Получены теорема вида теоремы Валле-Пуссена, условия положительности функции Коши.

Предлагаемая работа посвящена приложению теоремы Валле-Пуссена к линейным сингулярным функционально-дифференциальным уравнениям первого порядка. Название «Теорема Валле-Пуссена» было предложено Н. В. Азбелевым в 1970-х годах для теоремы об эквивалентности некоторых свойств дифференциального уравнения. Это, в частности, утверждения о существовании знакопостоянного решения дифференциального уравнения, о величине спектрального радиуса вспомогательного интегрального оператора, об изотонности оператора Коши (Грина).

Теорема Валле-Пуссена для абстрактных функционально-дифференциальных уравнений [1, с. 18] приведена в [1, с. 356–363]. Различные варианты общей теоремы для конкретных видов функционально-дифференциальных уравнений рассматривались, например, в работах [2–7].

Рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) + (Bx)(t) - (Tx)(t) = f(t), \qquad t \in [0,b], \tag{1}$$

где правая часть f принадлежит пространству $L^p[0,b] = L^p$ суммируемых со степенью $p \in (1,\infty)$ функций $z\colon [0,b] \to \mathbb{R}$, имеющему стандартную норму $\|z\|_{L^p} = \left(\int\limits_0^b |z(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$.

Определим пространство $D^p[0,b] = D^p$ абсолютно непрерывных функций $x\colon [0,b] \to \mathbb{R}$, имеющих производную в пространстве L^p. Решение x принадлежит пространству $D_0^p[0,b] = D_0^p$ функций $x \in D^p$, удовлетворяющих дополнительному условию $x(0) = 0$. Норма в этом пространстве имеет вид $\|x\|_{D_0^p} = \|\dot{x}\|_{L^p}$.

Отметим, что пространство D_0^p изоморфно пространству L^p. Изоморфизм между пространствами D_0^p и L^p определим равенством $z(t) = \dot{x}(t)$, где $x \in D_0^p$, $z \in L^p$. Обратное преобразование в этом случае имеет вид $x(t) = \int\limits_0^t z(s)\,ds$.

В дальнейшем будем использовать также пространства $L^p[a,b]$ и $D^p[a,b]$, где $0 < a < b$, определенные аналогично пространствам $L^p[0,b]$ и $D^p[0,b]$ соответственно.

Оператор $B\colon D_0^p \to L^p$ определим равенством $(Bx)(t) = q(t)x_h(t)$, где $h(t) \leqslant t$ — измеримая на отрезке $[0,b]$ функция, $x_h(t) = \begin{cases} x[h(t)], & \text{если } h(t) \in [0,b], \\ 0, & \text{если } h(t) \notin [0,b]. \end{cases}$ Функция $q \geqslant 0$

является сингулярной в точке $t = 0$, а именно, $q \notin L^p[0,b]$, но $q \in L^p[\varepsilon,b]$ для любого $\varepsilon > 0$. Определим оператор $B^\varepsilon\colon D^p[\varepsilon,b] \to L^p[\varepsilon,b]$ равенством

$$(B^\varepsilon x)(t) = \begin{cases} (Bx)(t), & \text{если } h(t) \in [\varepsilon,b], \\ 0, & \text{если } h(t) \notin [\varepsilon,b]. \end{cases}$$

Функции q, h таковы, что оператор $B^\varepsilon\colon D^p[\varepsilon,b] \to L^p[\varepsilon,b]$ вполне непрерывен для любого $\varepsilon > 0$ и $B\colon D^p[0,b] \to L^p[0,b]$ не является вполне непрерывным, но ограничен. Например, оператор B может иметь вид $(Bx)(t) = \dfrac{1}{t^2}x(t^3)$ или $(Bx)(t) = \dfrac{1}{t}x\left(\dfrac{t}{2}\right)$ при $t \in [0,1]$. Случай $(Bx)(t) = \dfrac{1}{t}x(t)$ рассмотрен в работе [8].

Так как $q \geqslant 0$, то оператор $B\colon D_0^p \to L^p$ изотонен (то есть $Bx \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$); так как $h(t) \leqslant t$, то оператор $B\colon D_0^p \to L^p$ вольтерров (то есть условие $x(t) = 0$ при $t \in [0,c]$, $c \in \in (0,b)$, гарантирует справедливость равенства $(Bx)(t) = 0$ на отрезке $t \in [0,c]$). Оператор T положим линейным ограниченным вольтерровым.

Пусть уравнение (1) однозначно разрешимо при любой правой части. Тогда его решение имеет вид $x = Cf$, где $(Cf)(t) = \int\limits_0^t C(t,s)f(s)\,ds$, $C(t,s)$ — функция Коши, C — оператор Коши. Функция Коши $g_s(\cdot) \equiv C(\cdot,s)$ как функция первого аргумента является решением задачи $\begin{cases} (\mathcal{L}y)(t) = 0, \\ y(s) = 1 \end{cases}$ при $t \in [s,b]$ и тождественно равна нулю при $t < s$.

Положим $T \equiv 0$ и рассмотрим вспомогательное уравнение

$$(\mathcal{L}_0 x)(t) \equiv \dot{x}(t) + (Bx)(t) = f(t). \tag{2}$$

Обозначим $C_0\colon L^p \to D_0^p$ оператор Коши для уравнения (2).

Пусть $s \in (0,b]$ и оператор $K_0\colon C[s,b] \to C[s,b]$ имеет вид $(K_0x)(t) = \int\limits_t^b (Bx)(\zeta)\,d\zeta$. Также определим оператор $\mathcal{L}_0^s\colon D_0^p \to L^p$ равенством

$$\left(\mathcal{L}_0^s x\right)(t) = \begin{cases} (\mathcal{L}_0 x)(t), & \text{если } t \in [s,b], \\ 0, & \text{если } t \notin [s,b]. \end{cases}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть задача Коши для уравнения* (1) *однозначно разрешима.*

Тогда эквивалентны следующие утверждения.

а) *Существует семейство функций $u^s(t) > 0$, таких что $\mathcal{L}_0^s u^s \leqslant 0$ для любого значения $s \in (0,b)$.*

б) *Функция Коши уравнения* (1) *строго положительна при $t \geqslant s > 0$.*

в) *Спектральный радиус оператора K_0 меньше единицы.*

г) *Для всех $s > 0$ задача*

$$\begin{cases} \left(\mathcal{L}_0^s y\right)(t) = f(t), & t \in [s,b], \\ y(b) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

однозначно разрешима в пространстве $D^p[s,b]$, и ее функция Грина неположительна.

д) *Любое нетривиальное решение уравнения $\left(\mathcal{L}_0^s y\right)(t) = 0$ в пространстве $D^p[s,b]$ не имеет нулей на отрезке $[s,b]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эквивалентность утверждений а) и б) доказывается аналогично работе [9] (см. также [10, с. 65]).

Импликация б) $\Rightarrow$ в). В силу определения функции Коши $g_s(t) \equiv C(t,s)$ справедливо равенство $g_s(t) - \int\limits_t^b \big(Bg_s\big)(\zeta)\, d\zeta = g_s(b)$. Так как $g_s(b) > 0$, то [1, с. 339, теорема Д.2] спектральный радиус оператора K_0 меньше единицы.

Импликация в) $\Rightarrow$ г). Зафиксируем $s \in (0,b]$ и воспользуемся изоморфизмом пространств $D^p[s,b]$ и $L^p[s,b]$. Изоморфизм установим следующим образом: $\dot{y}(t) = z(t)$, $y(b) = 0$; $y(t) = -(\Lambda z)(t) \equiv -\int\limits_t^b z(s)\, ds$, где $y \in D^p[s,b]$, $z \in L^p[s,b]$. Тогда задача (3) примет вид

$$(I - K_0)y = -\Lambda f. \tag{4}$$

Так как спектральный радиус оператора $K_0 = \Lambda B$ меньше единицы, то уравнение (4) имеет единственное решение $z = G_0 f \equiv -\big(I + K_0 + K_0^2 + \ldots\big)\Lambda f$ с антитонным оператором G_0.

Импликация г) $\Rightarrow$ а). В качестве функции $u^s(t)$ можно взять решение задачи

$$\begin{cases} \big(\mathcal{L}_0^s x\big)(t) = -1, \\ x(b) = 0. \end{cases}$$

Эквивалентность утверждений б) и д) следует из того факта, что ядро оператора $\mathcal{L}$ в пространстве $D^p[s,b]$ пропорционально функции $g_s(t)$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть существуют такая константа* s_0 *и такая функция* $u^{s_0}(t) > 0$, *что* $\big(\mathcal{L}^{s_0} u^{s_0}\big)(t) \leqslant 0$.

Тогда для любого значения $s > s_0$ *существует функция* $u^s(t) > 0$, *порождающая неположительную невязку* $\mathcal{L}_0^s u^s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $u^s(t) = u^{s_0}(t)$ при $t \geqslant s$.

Тогда для $t \in [s,b]$ справедливо неравенство $\big(\mathcal{L}^s u^s\big)(t) \leqslant \big(\mathcal{L}^{s_0} u^{s_0}\big)(t)$.

Так как $\mathcal{L}^{s_0} u^{s_0} \leqslant 0$ в силу условия теоремы, то невязка $\mathcal{L}^s u^s$ тем более неположительна. Теорема доказана.

Пусть теперь $T \not\equiv 0$. Вернемся к уравнению (1).

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда эквивалентны следующие утверждения.*

а) *Существует функция* $v \in D_0^p$, *положительная при* $t \in (0,b]$ *и порождающая неотрицательную невязку* $\mathcal{L}v$.

б) *Спектральный радиус оператора* $C_0 T$ *меньше единицы.*

в) *Уравнение* (4) *имеет единственное решение при любой правой части, оператор Грина этого уравнения антитонен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично доказательству теоремы Валле-Пуссена для абстрактных функционально-дифференциальных уравнений [1, с. 359–360, теорема Д.14].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002.

2. *Азбелев Н.В., Домошницкий А.И.* К вопросу о линейных дифференциальных неравенствах, I // Дифференциальные уравнения. Москва, 1991. Т. 27. № 3. С. 376–384.

2. *Азбелев Н.В., Домошницкий А.И.* К вопросу о линейных дифференциальных неравенствах, II // Дифференциальные уравнения. Москва, 1991. Т. 27. № 6. С. 923–931.

3. *Исламов Г.Г.* О некоторых приложениях теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения, I // Дифференциальные уравнения. Москва, 1989. Т. 25. № 11. С. 1872–1881.

4. *Исламов Г.Г.* О некоторых приложениях теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения, II // Дифференциальные уравнения. Москва, 1990. Т. 26. № 2. С. 224–232.

5. *Лабовский С.М.* О положительных решениях двухточечной краевой задачи для линейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. Москва, 1988. Т. 24. № 10. С. 1695–1704.

6. *Чичкин Е.С.* Теорема о дифференциальном неравенстве для многоточечных краевых задач // Известия вузов. Серия: Математика. Казань, 1962. № 2. С. 170–179.

7. *Азбелев Н.В., Алвеш М.Ж., Бравый Е.И.* О сингулярной краевой задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка // Известия вузов. Серия: Математика. Казань, 1999. № 2. С. 3–11.

8. *Плаксина И.М.* О положительности функции Коши сингулярного линейного функционально-дифференциального уравнения // Известия вузов. Серия: Математика. Казань, 2013. № 10. С. 16-23.

9. *Domoshnitsky A.* Maximum principles and non-oscillation intervals for first order Volterra functional differential equations // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis. Waterloo (Ontario, Canada), 2008. V. 15. Issue 6. P. 769-814.

10. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (проект № 14–01–00338).

Поступила в редакцию 9 июня 2015 г.

Plaksina I.M. ON THE CAUCHY FUNCTION POSITIVITY FOR A SINGULAR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION

The article discusses first order functional-differential equations with independent variable singularity. Vallée-Poussin-like theorem, the Cauchy function positivity conditions are obtained.

Key words: functional-differential equations; singular equations; Cauchy problem; Cauchy function; differential inequalities.

Плаксина Ирина Михайловна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры автоматизации технологических процессов, e-mail: impl@list.ru

Plaksina Irina Mikhailovna, Perm National Research Polytechnical University, Perm, the Russian Federation, Senior Lecturer of the Process Automation Department, e-mail: impl@list.ru

УДК 517.929

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© В.П. Плаксина, И.М. Плаксина, Э.В. Плехова

Ключевые слова: сингулярное дифференциальное уравнение; задача Коши; функционально-дифференциальное уравнение.

Рассматривается квазилинейная задача Коши с нулевыми начальными условиями для сингулярного функционально-дифференциального уравнения второго порядка. Получены достаточные условия разрешимости рассматриваемой задачи Коши и соответствующей линейной задачи.