calculation is based on the idea of introducing multiple time steps, subject to agreement with the number of the Courant. Description of the properties and steps of the algorithm is given. Application of the proposed algorithm will allow us to achieve a significant acceleration of computing time. Also, the dependence of the number of steps calculated by the radius is constructed.

Key words: multiphase filtration; radial symmetry; numerical method; the Courant number; the difference scheme.

Шангараева Алина Ильгизаровна, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, аспирант кафедры аэрогидромеханики, e-mail: linka390@mail.ru

Shangaraeva Alina Il'gizarovna, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Aerohydromechanics Department, e-mail: linka390@mail.ru

Шевченко Денис Вячеславович, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, доцент кафедры аэрогидромеханики; Институт экономики, управления и права, г. Казань, Российская Федерация, заведующий кафедрой высшей математики, кандидат физико-математических наук, профессор, e-mail: dv@ieml.ru

Shevchenko Denis Vyacheslavovich, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Aerohydromechanics Department, e-mail: dv@ieml.ru

УДК 517.91

СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НЕГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ МНОГОКРАТНОМ ВЫРОЖДЕНИИ

© **И.В. Шарафутдинов**

Ключевые слова: бифуркация Хопфа; негладкая система; многократное вырождение; периодические решения; устойчивость.

Предлагаются методы определения типа бифуркации и устойчивости установившихся колебательных режимов динамических систем с негладкой правой частью, имеющей при некотором значении параметра несколько пар чисто мнимых собственных значений.

Рассматривается динамическая система

$$x' = F(x, \lambda)\,, \quad x \in \mathbb{R}^N\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

где $F(0,\lambda) \equiv 0$, вектор-функция $F(x,\lambda)$ является гладкой по λ, а по переменной x её гладкость нарушается на некоторой $N-1$-мерной гиперплоскости $\Pi_0 = \{x: \ (x,b_0) = \alpha_0\}$, где $b_0 \in \mathbb{R}^N$ — некоторый ненулевой вектор и число $\alpha_0 \geqslant 0$. Пусть правая часть системы (1) представима в виде

$$F(x,\lambda) = \begin{cases} F_+(x,\lambda), \ (x,b_0) > \alpha_0, \\ F_0(x,\lambda), \ (x,b_0) = \alpha_0, \\ F_-(x,\lambda), \ (x,b_0) < \alpha_0, \end{cases}$$

где F_+ и F_- являются гладкими по переменной x в соответствующих полуокрестностях точки $x = 0$.

Пусть оператор F_+ продолжим на всё пространство $\mathbb{R}^N$ с сохранением гладкости по переменной x. Продолжив его на всё пространство, полученную систему можно представить (см. [1]) в виде

$$x' = A(\lambda)x + a(x,\lambda), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

где $A(\lambda) = F'_{+x}(0,\lambda)$ — матрица Якоби для функции $F_+(x,\lambda)$, вычисленная в начале координат, $a(x,\lambda)$ — нелинейная вектор-функция. Пусть выполнены три условия:

U1) матрица $A_0 = A(\lambda_0)$ имеет несколько пар простых чисто мнимых собственных значений $\pm\omega_1 i$, $\pm\omega_2 i \ldots$, $\pm\omega_p i$ где $\omega_p > \ldots > \omega_2 > \omega_1 > 0$ и никакое из отношений $\dfrac{\omega_i}{\omega_j}$ $i,j \in \{1,\ldots,p\}$ не является рациональным числом. Вещественные части остальных собственных значений отрицательны.

U2) Матрица $A(\lambda)$ и функция $a(x,\lambda)$ непрерывно дифференцируемы по λ, причём $a(x,\lambda) = a_2(x,\lambda) + a_3(x,\lambda) + \varepsilon(x,\lambda)$, где $a_2(x,\lambda)$ и $a_3(x,\lambda)$ — члены порядка 2 и 3 по x, $\varepsilon(x,\lambda) = o(|x|^3)$ содержит слагаемые более высокого порядка малости.

В силу условия U1) у матрицы $A(\lambda)$ при малых $|\lambda - \lambda_0|$ есть простые собственные значения $\mu_k(\lambda) = \alpha_k(\lambda) \pm i\omega_k(\lambda)$ $k = 1,\ldots,p$, где все функции $\alpha_k(\lambda)$, $\omega_k(\lambda)$ непрерывны, причём $\alpha_k(\lambda_0) = 0$, $\omega_k(\lambda_0) = \omega_1$.

U3) Справедливы соотношения $\alpha'_k(\lambda_0) \neq 0$, $k = 1,\ldots,p$.

Система (1) при всех малых $|\lambda - \lambda_0|$ имеет нулевое решение (см. [1]). При переходе параметра λ через λ_0 в окрестности стационарного состояния $x = 0$ могут возникать нестационарные периодические решения малой амплитуды с периодом, близким к какому-либо из чисел $T_k = \dfrac{2\pi}{\omega_k}$, $k = 1,\ldots,p$.

Число λ_0 называется точкой бифуркации Хопфа для системы (1), если существует такая последовательность $\{\lambda_n\}$, сходящаяся к λ_0, что при каждом λ_n система (1) имеет нестационарное периодическое решение $x_n(t)$, и $\max\limits_t |x_n(t)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Т е о р е м а 1 (признак бифуркации). *Пусть выполнены условия* U1)-U3). *Тогда число* λ_0 *будет точкой бифуркации Андронова-Хопфа для системы* (1), *и у системы* (1) *при малых* $|\lambda - \lambda_0|$ *существует несколько семейств периодических решений, периоды которых близки соответственно к числам* $T_k = \dfrac{2\pi}{\omega_k}$, $k = 1,\ldots,p$.

При этом периодические решения каждого семейства существуют в точности в одном из трех случаев: (1) $\lambda > \lambda_0$ *(суперкритическая бифуркация); (2)* $\lambda < \lambda_0$ *(субкритическая бифуркация); (3)* $\lambda = \lambda_0$, *причем в первых двух случаях каждому* λ *отвечает не более одного цикла малой амплитуды каждого периода.*

Обозначим через A_0^* матрицу, транспонированную к A_0. Для каждой пары собственных значений $\pm\omega_k$ $k = 1,\ldots,p$ найдутся (см. [2]) две пары таких линейно независимых векторов $e_k, g_k \in \mathbb{R}^N$ и $e_k^*, g_k^* \in \mathbb{R}^N$, что $A_0 e_k = -\omega_k g_k$, $A_0 g_k = \omega_k e_k$, $A_0^* e_k^* = \omega_k g_k^*$, $A_0^* g_k^* = -\omega_k e_k^*$.

Пусть $C = C[0,1]$ – пространство непрерывных на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ вектор-функций с равномерной метрикой. Далее, пусть $G = G[0,1]$ — банахово пространство функций $x(t) \in \in C$, $x(0) = x(1)$, ряды Фурье которых абсолютно сходятся. Наконец, пусть $\Phi = \Phi[0,1]$ — банахово пространство функций $x(t) \in C$, $x(0) = 0$, таких, что $x(t) - tx(1) \in G$.

Определим функции $e_k(t) = e_k \cos 2\pi t - g_k \sin 2\pi t$, $g_k(t) = g_k \cos 2\pi t + e_k \sin 2\pi t$, и функционалы $\alpha_k[x(t)] = (x_c, g_k^*) + (x_s, e_k^*)$, $\beta[x(t)] = (x_c, e_k^*) - (x_s, g^*)$, где векторы x_c и x_s — это отвечающие $\cos 2\pi t$ и $\sin 2\pi t$ коэффициенты Фурье функции $x(t) \in G[0,1]$.

Наконец, определим действующий из Φ в G оператор $\Theta x(t) = x(t) - tx(1)$.

Из условия U1) следует, что матрица A_0 обратима. Основными в предлагаемой схеме являются следующие функции:

$$\psi_{2k}(t)=\int\limits_0^t a_2(e_k(s),\lambda_0)\,ds,\quad \psi_{3k}(t)=\int\limits_0^t a_3(e_k(s),\lambda_0)\,ds,$$

$$\Gamma_k(t)=\frac{1}{T_k}A_0^{-1}\psi_{2k}(1)-\Theta\psi_{2k}(t)-T_kA_0\int\limits_0^t \exp[T_kA_0(t-s)]\Theta\psi_{2k}(s)\,ds\,,$$

$$\psi_{1k}(t)=T_k\int\limits_0^t a'_{2x}(e_k(s),\lambda_0)\Gamma_k(s)\,ds-\psi_{3k}(t)\ ,\quad k=1,...,p.$$

Положим $A'=A'(\lambda_0)$ и определим числа: $\gamma_k=(A'e_k,e_k^*)+(A'g_k,g_k^*)\,,\ \delta_k=\alpha_k[\Theta\psi_{1_k}(t)]\,.$

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия* U1)–U3) *и* $\delta_k\neq 0$, $k=1,...,p$. *Тогда рождающиеся при малых* $|\lambda-\lambda_0|$ *периодические решения* $x(t,\lambda)$ *системы* (1) *с периодом, близким к* $\dfrac{2\pi}{\omega_k}$ *существуют только при* $\lambda<\lambda_0$, *если* $\delta_k\gamma_k<0$, *или только при* $\lambda>\lambda_0$, *если* $\delta_k\gamma_k>0$.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия* U1)–U3) *и* $\delta_k\neq 0$, $k=1,...,p$. *Если все* $\delta_k\gamma_k$ *одного знака, одно из чисел* δ_i *положительно, все остальные* δ_j *отрицательны, то устойчивы циклы того семейства, для которого* $\delta_i>0$.

Когда же среди чисел $\delta_k\gamma_k$ *есть как положительные, так и отрицательные, то поступаем таким образом: если для положительных* $\delta_k\gamma_k$ *найдётся одно положительное* δ_i, *а остальные при этом будут отрицательными, то устойчивыми будут периодические решения того семейства, для которого* $\delta_i>0$. *Аналогичную процедуру проводим для отрицательных* $\delta_k\gamma_k$. *Здесь тоже устойчивы те циклы, для которых* $\delta_i>0$, *а остальные* δ_j *при этом отрицательны.*

Во всех остальных случаях периодические решения неустойчивы.

В качестве примера рассмотрим автономную систему

$$\begin{cases} x_1'=x_2+(x_3+x_4)^2-10x_1^3,\\ x_2'=-2x_1-2\lambda x_2+x_3,\\ x_3'=x_4,\\ x_4'=x_1-2x_3-2\lambda x_4,\\ x_5'=-x_6,\\ x_6'=2x_2-10x_6^3. \end{cases}$$

Число $\lambda=0$ является для этой системы точкой бифуркации рождения цикла.

При $\omega_1=1$ получим $\gamma_1\approx 1,1786$, $\delta_1\approx -0,2455$. То есть $\gamma_1\delta_1<0$, значит, бифурцирующие решения системы с периодом, близким к $T_1=2\pi$, существуют при $\lambda<0$.

При $\omega_2=\sqrt{2}$ получим $\gamma_2\approx 21,6543$, $\delta_2\approx -1,2326$. То есть $\gamma_2\delta_2<0$, значит, бифурцирующие решения с периодом, близким к $T_1=\sqrt{2}\pi$, существуют при $\lambda<0$.

При $\omega_3=\sqrt{3}$ получим $\gamma_3\approx 1,1806$, $\delta_3\approx 0,2131$. То есть $\gamma_1\delta_1>0$, значит, бифурцирующие решения системы с периодом, близким к $T_1=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$, существуют при $\lambda>0$.

Так как $\gamma_1\delta_1$ и $\gamma_2\delta_2$ одного знака, $\delta_1<0$, $\delta_2<0$, то циклы и первого, и второго семейств неустойчивы. В случае единственного положительного $\delta_3\gamma_3$ имеем $\delta_3>0$, значит, периодические решения третьего семейства устойчивы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М.А., Кузнецов Н.А., Юмагулов М.Г.* Операторный метод анализа устойчивости циклов при бифуркации Хопфа // Автоматика и телемеханика. 1996. № 12. С. 24-30.

2. *Шарафутдинов И.В.* Бифуркация Андронова-Хопфа в системах с негладкими нелинейностями // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 4. С. 835-837.

Поступила в редакцию 5 мая 2015 г.

Sharafutdinov I.V. PROPERTIES OF PERIODIC OSCILLATIONS OF NON-SMOOTH DYNAMICAL SYSTEMS UNDER MULTIPLE DEGENERATION

The methods of determining the type of bifurcation and stability of steady vibrational modes of dynamic systems with non-smooth right-hand side which has, under a certain value of the parameter, a few pairs of pure imaginary eigenvalues are considered.

Key words: Hopf bifurcation; non-smooth system; multiple degeneration; periodic solution; stability.

Шарафутдинов Ильдар Вакильевич, Башкирский государственный университет (Стерлитамакский филиал), г. Стерлитамак, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры алгебры, геометрии и методики обучения математике, e-mail: sh_ildar_79@mail.ru

Sharafutdinov Ildar Vakilievich, Bashkir State University (Sterlitamak Branch), Sterlitamak, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Algebra, Geometry and Teaching Mathematics Department, e-mail: sh_ildar_79@mail.ru

УДК 517.927

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ФОРМАХ ПРОГИБА ПЛАСТИНЫ ПРИ ПРОДОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

© **Г.Г. Шарафутдинова**

Ключевые слова: прогиб пластины; продольная нагрузка; точка бифуркации.

В работе приведено решение задачи о формах прогиба продольно нагруженной пластины методами теории локальных бифуркаций. Для этого предлагается переход от дифференциальных уравнений к эквивалентному операторному уравнению.

Пусть $\Omega = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$ — прямоугольная замкнутая область на плоскости $\mathbb{R}^2$, W_2^2 — пространство Соболева, $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ — подпространство пространства W_2^2, полученное замыканием множества всех бесконечно дифференцируемых функций с носителями в Ω. Определим функцию $F(x,y) = v(x,y) + N_y \cdot \dfrac{x^2}{2}$, где v — функция напряжений (функция Эйри) в срединной плоскости пластины, параметр N_y характеризует продольную сжимающую силу, приложенную к краям пластины вдоль оси OY.

Дифференциальные уравнения, описывающие прогиб w продольно нагруженной прямоугольной пластины длины a и ширины b имеют вид

$$L_1 \equiv d \cdot \Delta^2 w - h \cdot L(w,F) + hN_y L(w,c) = 0, \tag{1}$$