УДК 515.12

О НАКРЫТИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

© Е. Б. Пасынкова

Ключевые слова: полнота метрических пространств; отображения метрических пространств; накрывающие фундаментальные последовательности.
Для отображений метрических пространств получено достаточное условие полноты пространства-образа в случае полноты отображаемого пространства или графика отображения. Условие основывается на накрытии фундаментальных последовательностей пространства-образа такими же последовательностями отображаемого пространства.

Под пространством понимается метрическое пространство. Непрерывность отображения пространств будет оговариваться специально. Для точки x пространства X открытый (замкнутый) шар радиуса r с центром в точке x обозначается символом $O(x,r)$ (соответственно, $B(x,r)$). На произведении пространств (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) рассматривается метрика $\rho_X+\rho_Y$. Как обычно, считаем, что пространство X является подпространством своего пополнения X^*.

НАКРЫТИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Фиксируем пространство Y . Множество всех фундаментальных последовательностей точек в Y обозначается символом $FS(Y)$.

Фундаментальные последовательности $t=\{y_n : n\in\mathbb{N}\}$ и $t'=\{y'_n : n\in\mathbb{N}\}$ точек в Y будем называть *сближающимися* (или говорить, что эти последовательности *сближаются*), если

$$\rho(y_n,y'_n)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{0}$$

Замечание 0. Очевидно,

1) если последовательности t и t' точек в Y обладают свойством (0) и t фундаментальна (сходится к точке $\eta\in Y$), то t' тоже фундаментальна (тоже сходится к точке η) и t и t' сближаются;

2) фундаментальные последовательности t и t' точек в Y сближаются тогда и только тогда, когда они сходятся к одной и той же точке в Y^* .

Хорошо известно, что свойство фундаментальных последовательностей точек в Y быть сближающимися, является отношением эквивалентности на множестве $FS(Y)$. Классы эквивалентности этого отношения будут называться *классами сближения в* Y . Класс сближения в Y , содержащий $t\in FS(Y)$, будет обозначаться символом $[t]$. Множество всех классов сближения в Y будет обозначаться символом $[FS(Y)]$.

Фиксируем отображение пространств $f: X\to Y$.

Определение 1. Будем говорить, что для последовательности $t=\{y_n : n\in\mathbb{N}\}$ точек в Y , последовательность $s=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ точек в X

1. *фундаментально накрывает* t , если последовательность s фундаментальна и накрывает t , т.е. $f(x_n)=y_n$ для любого n (кратко, $f(s)=t$);

2. *фундаментально накрывает класс сближения* $[\cdot]$ в Y, если s фундаментальна и $f(s)\in[\cdot]$ (это означает в случае $[\cdot]=[t]$, что последовательности fs и t сближаются).

Определение 2. Будем говорить, что f

1. *фундаментально накрывает фундаментальные последовательности в* Y, если для любой фундаментальной последовательности t точек в Y существует последовательность s точек в X, фундаментально накрывающая t;

2. *фундаментально накрывает классы сближения в* Y, если для любого $[\cdot] \in [FS]$ найдется последовательность s точек в X, фундаментально накрывающая $[\cdot]$.

Очевидно, *если* f *фундаментально накрывает фундаментальные последовательности в* Y, *то* f *фундаментально накрывает классы сближения в* Y.

Лемма 1. *Пусть последовательность* s *точек пространства* X *фундаментально накрывает класс сближения* $[t]$ *в* Y. *Если*

1) пространство X *полно и отображение* f *непрерывно*

или

2) график отображения f *– полное пространство,*

то существуют пределы $\xi \in X$ *последовательности* s *и* $\eta \in Y$ *последовательности* t, *такие, что* $\eta = f(\xi)$.

Теорема 1 (Основная теорема). *Пусть отображение пространств* $f : X \to Y$ *фундаментально накрывает классы сближения в* Y. *Тогда пространство* Y *полно, если хотя бы один из пунктов 1) или 2) леммы 1 выполняется.*

α-НАКРЫВАЮЩИЕ И ОТКРЫТО α-НАКРЫВАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Определение 3. Для $\alpha > 0$, отображение f называется α*-накрывающим*, если

$(*)_{cov}$ для любой точки $x \in X$ и любого $r > 0$,

$$f(B(x,r) \supset B(fx, \alpha \cdot r). \qquad (1)_{cov}$$

Класс α-накрывающих отображений довольно давно начал исследовать А.А. Милютин, и им была доказана известная теорема о возмущении α-накрывающего отображения липшицевым.

Определение 4 (А.В. Арутюнов [1]). Отображение f называется *открыто* α*-накрывающим* для $\alpha > 0$, если

$(*)_{ocov}$ для любой точки $x \in X$ и любого $r > 0$,

$$f(O(x,r)) \supset O(f(x), \alpha \cdot r). \qquad (1)_{ocov}$$

Теорема 2. *Если отображение* f *является открыто* α*-накрывающим (в частности,* α*-накрывающим) для некоторого* α, *то оно фундаментально накрывает фундаментальные последовательности в* Y.

Следствие 1. *Пусть отображение* f *является открыто* α*-накрывающим (в частности,* α*-накрывающим) для некоторого* α. *Если выполнено хотя бы одно из условий 1) или 2) леммы 1, то пространство* Y *полно.*

Отметим, что частично (когда выполняется условие 1) леммы 1) следствие 1 может быть выведено из следствия 6.37 в [2].

Лемма 2. *Пусть отображение* f *является открыто* α*-накрывающим. Тогда для любой точки* $x \in X$ *и любых* $r > 0$, $\delta > 0$,

$$f(O(x, r+\delta)) \supset cl f(O(x,r)). \qquad (2)_{ocov}$$

Замечание 1. Лемма 2 связана с леммами 6.36 в [2] и 11.1, 11.2 в [1]. Соотношение $(2)_{ocov}$ получено в [2] и [1] для более общих классов отображений (в частности, для многозначных и для открыто α-заполняющих (см. ниже)). Но в доказательстве леммы 2 не используется ни полнота пространства X или графика отображения f, ни замкнутость этого графика.

α-ЗАПОЛНЯЮЩИЕ И ОТКРЫТО α-ЗАПОЛНЯЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Определение 5 (Б.А. Пасынков). Отображение пространств $f : X \to Y$ называется α-*заполняющим* для $\alpha > 0$, если

$(*)_{fil}$ для любой точки $x \in X$ и любого $r > 0$,

$$cl(f(B(x,r)) \supset B(f(x), \alpha \cdot r). \qquad (1)_{fil}$$

Определение 6 (А.В. Арутюнов [1]). Отображение пространств f называется *открыто* α-*заполняющим* для $\alpha > 0$, если

$(*)_{ofil}$ для любой точки $x \in X$ и любого $r > 0$,

$$cl(f(O(x,r))) \supset O(f(x), \alpha \cdot r). \qquad (1)_{ofil}$$

В [1] открыто α-заполняющие отображения в смысле определения 6 называются заполняющими.

Напомним, что отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется:
открытым, если для любого открытого множества U в X образ $f(U)$ открыт в Y;
d-*открытым*, если для любого открытого множества U в X существует открытое множество V в Y, такое, что $f(U)$ – плотное подмножество подпространство V.

Предложение 1. *Если f является*

1) открыто α-накрывающим (в частности, α-накрывающим) для некоторого α, то f открыто,

2) открыто α-заполняющим (в частности, α-заполняющим) для некоторого α, то f d-открыто.

Утверждение 1) предложения 1, вероятно, известно.

Теорема 3. *Если f является открыто α-заполняющим (в частности, α-заполняющим) для некоторого α, то f фундаментально накрывает классы сближения в Y.*

Следствие 2. *Пусть f является открыто α-заполняющим (в частности, α-заполняющим) для некоторого α. Если выполнено хотя бы одно из условий 1) или 2) леммы 1, то пространство Y полно.*

Определение 5. Пусть Z – пространство, $z \in Z$ и $r > 0$. Последовательность t точек в $O(z,r)$ будет называться *внутренней в* $O(z,r)$, если существует $r' \in (0,r)$, такое, что $t \subset O(z,r')$.

Теорема 4. *Пусть отображение $f : X \to Y$ является открыто α-заполняющим. Тогда для любой точки $x \in X$, любого $r > 0$ и любой фундаментальной и внутренней в $O(fx, \alpha \cdot r)$ последовательности t существует внутренняя в $O(x,r)$ последовательность s, которая фундаментально накрывает класс $[t]$ и $f(s) \subset O(fx, \alpha \cdot r)$.*

Следствие 3. *Пусть отображение пространств $f : X \to Y$ является открыто α-заполняющим. Если выполнено хотя бы одно из условий 1) или 2) леммы 1, то отображение f является открыто α-накрывающим.*

Отметим, что одна часть следствия 3 (когда выполняется условие 2) леммы 1) вытекает, например, из теоремы 11.3 книги [1].

Из следствия 3 и леммы 2 вытекает

Следствие 4. *Пусть отображение пространств* $f : X \to Y$ *является открыто* α*-заполняющим и хотя бы одно из условий 1) или 2) леммы 1 выполнено. Тогда для любой точки* $x \in X$ *и любых* $r > 0$, $\delta > 0$, *верно* $(2)_{ocov}$.

Отметим, что одна часть следствия 4 (когда выполняется условие 2) леммы 1) получена в [1], лемма 11.2, а вторая часть следствия 4 может быть выведена из [2], лемма 6.36 (когда выполняется условие 1) леммы 1).

Благодарю А.В. Арутюнова за внимание к моей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнов А.В.* Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М.: Физматлит, 2014.

2. *Келли Дж.Л.* Общая топология. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию 2 апреля 2015 г.

Pasynkova E.B. ON COVERING OF FUNDAMENTAL SEQUENCES

For mappings between metric spaces, a sufficient condition for the completeness of the ranges in the case of the completeness of the domains or the graphs of the mappings is obtained. The condition is based on the covering of fundamental point sequences in the ranges by such sequences in the domains.

Key words: Completeness of metric spaces; Mappings of metric spaces covering fundamental sequences.

Пасынкова Евгения Борисовна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, факультет физико-математических и естественных наук, кафедра нелинейного анализа и оптимизации, студентка 4-го курса, e-mail: evgeniya-pasynkova@mail.ru

Pasynkova Evgeniya Borisovna, People's Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation, Faculty of Physics, Mathematics and Natural Sciences, Department of nonlinear analysis and optimization, 4th year student, e-mail: evgeniya-pasynkova@mail.ru