

Андреева Ирина Юрьевна, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики УралЭНИИ, e-mail: i.y.andreeva@urfu.ru.

Andreeva Irina Yur'evna, Ural Federal University, Ekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics Department, e-mail: i.y.andreeva@urfu.ru.

Сесекин Александр Николаевич, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Россия, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики УралЭНИИ; Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, ведущий научный сотрудник, e-mail: a.n.sesekin@urfu.ru

Sesekin Aleksandr Nikolaevich, Ural Federal University, Ekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, the Head of the Applied Mathematics Department, e-mail: a.n.sesekin@urfu.ru

УДК 517.958

## О ВНУТРЕННЕЙ РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА–КУЗНЕЦОВА

© А.П. Антонова, А.В. Фаминский

*Ключевые слова:* уравнение Захарова–Кузнецова; задача Коши; внутренняя регулярность решений.

Рассматривается вопрос о внутренней регулярности слабых решений задачи Коши для уравнения Захарова–Кузнецова в случае двух пространственных переменных. Устанавливается результат о существовании у этих решений производных, непрерывных в нормах Гёльдера.

В работе исследуются вопросы внутренней регулярности слабых решений задачи Коши для уравнения Захарова–Кузнецова на плоскости

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + uu_x = f(t, x, y) \quad (1)$$

( $u = u(t, x, y)$ ) в слое  $\Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}^2$  ( $T > 0$  – произвольно) с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x, y). \quad (2)$$

Уравнение (1) было выведено в работе [1] для описания распространения нелинейных ионно-звуковых волн в плазме, помещенной в магнитное поле, и в дальнейшем получило название уравнения Захарова–Кузнецова. Оно является одним из вариантов обобщения уравнения Кортевега–де Фриза  $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$  на случай нескольких пространственных переменных.

В работе [2] была установлена глобальная корректность задачи (1), (2) при начальной функции из  $H^m(\mathbb{R}^2)$  и правой части из  $L_1(0, T; H^m(\mathbb{R}^2))$  при натуральных  $m$  в некотором специальном классе функций  $K_m(0, T) \subset C([0, T]; H^m(\mathbb{R}^2))$ . Для  $m = 1$  этот класс описывается следующим образом:

$$K_1(0, T) = \{u \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R}^2)), \quad u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} \in L_\infty(\mathbb{R}^x; L_2((0, T) \times \mathbb{R})), \\ u \in L_3(0, T; W_\infty^1(\mathbb{R}^2)), \quad u \in L_2(\mathbb{R}^x; L_\infty((0, T) \times \mathbb{R}))\}.$$

В работах [3, 4] при изучении задачи Коши для уравнения Захарова–Кузнецова было установлено свойство повышения внутренней гладкости обобщенных решений в зависимости от скорости убывания нерегулярной начальной функции  $u_0$ , правой части  $f$  и ее производных при  $x \rightarrow +\infty$  (ранее для уравнения Кортевега–де Фриза подобное свойство было получено в статьях [5, 6]). В частности, в статье [4] решения рассматривались при начальной функции из функциональных пространств  $L_2^\alpha$  и  $H^{1,\alpha}$ , где для  $\alpha \geq 0$

$$L_2^\alpha = L_2^\alpha(\mathbb{R}^2) = \left\{ \phi \in L_2(\mathbb{R}^2) : (1+x)^\alpha \phi \in L_2(\mathbb{R}_+^2) \right\}, \quad \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : x > 0\},$$

$$H^{1,\alpha} = H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2) = \left\{ \phi \in H^1(\mathbb{R}^2) : \phi, \phi_x, \phi_y \in L_2^\alpha \right\}.$$

Из результатов статей [2] и [4] вытекает следующая теорема (символом  $[\alpha]$  обозначена целая часть числа  $\alpha \geq 0$ ,  $\partial^\nu = \partial_x^{\nu_1} \partial_y^{\nu_2}$  для мультииндекса  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ ,  $|\nu| = \nu_1 + \nu_2$ ).

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $u_0 \in H^{1,\alpha}$ ,  $f \in L_\infty(0, T; H^{1,\alpha})$  для некоторого  $\alpha > 3/4$  тако-го, что число  $(2\alpha + 1/2)$  – нецелое,  $\partial^\nu f \in L_\infty(0, T; L_2^{\alpha-|\nu|/2+1/2})$  при  $2 \leq |\nu| \leq 2\alpha + 1$ , натуральное  $m = [2\alpha + 1/2]$ , натуральное  $\nu_0 = [2\alpha + 1]$ . Тогда существует непрерывное в  $\Pi_T$  решение  $u(t, x, y)$  задачи (1), (2) из пространства  $K_1(0, T) \cap L_\infty(0, T; H^{1,\alpha})$  (оно единственно в пространстве  $K_1(0, T)$ ). Это решение обладает в  $\Pi_T$  обобщенными производными  $\partial^\nu u$  до порядка  $|\nu| \leq \nu_0$  и непрерывными производными  $\partial^\nu u$  до порядка  $|\nu| \leq m - 1$ . При этом для любых  $\delta \in (0, T)$  и  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$(x - x_0 + 1)^{\alpha-|\nu|/2+1/2} \partial^\nu u \in L_\infty(\delta, T; L_2((x_0, +\infty) \times \mathbb{R})), \quad 2 \leq |\nu| \leq \nu_0; \quad (3)$$

$$\sup_{t \in [\delta, T], x \geq x_0} |\partial^\nu u(t, x, y)| < \infty, \quad 0 \leq |\nu| \leq m - 1. \quad (4)$$

В настоящей работе получены оценки для непрерывных производных  $\partial^\nu u$  в нормах Гёльдера.

**Т е о р е м а 2.** Пусть выполнены условия Теоремы 1. Тогда решение  $u(t, x, y)$  задачи (1), (2) из пространства  $K_1(0, T)$  обладает следующим свойством: если  $|\nu| = m - 1$ ,  $\varepsilon = 2\alpha - m + 1/2$ , то для любых  $\delta \in (0, T)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_1, x_2 \geq x_0$ ,  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [\delta, T]$  и  $\sigma \in (0, \varepsilon)$

$$|\partial^\nu u(t, x_1, y_1) - \partial^\nu u(t, x_2, y_2)| \leq c(|x_1 - x_2|^{\varepsilon-\sigma} + |y_1 - y_2|^{\varepsilon-\sigma}); \quad (5)$$

а если  $|\nu| = m - 1 - j$ ,  $j = 0, 1, 2$ ,  $\varepsilon = 2\alpha - m - 1/2 + j$ , то для любых  $\delta \in (0, T)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq x_0$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $t, \tau \in [\delta, T]$  и  $\sigma \in (0, \varepsilon)$

$$|\partial^\nu u(t, x, y) - \partial^\nu u(\tau, x, y)| \leq c|t - \tau|^{(\varepsilon-\sigma)/3}, \quad (6)$$

где константы  $c$  зависят от  $x_0$ ,  $\delta$ ,  $\sigma$ ,  $\alpha$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Используем свойства фундаментального решения оператора  $\partial_t + \partial_{xxx}^3 + \partial_{xyy}^3$ , которое, как нетрудно видеть, задается формулой

$$G(t, x, y) = \theta(t) \mathcal{F}^{-1} [e^{it(\xi_1^3 + \xi_1 \xi_2^2)}] \equiv \frac{\theta(t)}{t^{2/3}} S\left(\frac{x}{t^{1/3}}, \frac{y}{t^{1/3}}\right),$$

где

$$S(x, y) = \mathcal{F}^{-1} [e^{i(\xi_1^3 + \xi_1 \xi_2^2)}] (x, y),$$

$\theta$  – функция Хевисайда,  $\mathcal{F}^{-1}$  – обратное преобразование Фурье. Свойства функции  $S$  были изучены в работах [2, 4]. Доказано, что функция  $S$  бесконечно дифференцируема и для любых  $x_0 \in \mathbb{R}$ , целого  $m \geq 0$  и мультииндекса  $\nu$

$$(1 + |y|)^m |\partial^\nu S(x, y)| \leq c(m, |\nu|, x_0) e^{-c_0(x-x_0)^{3/2}} \quad \forall x \geq x_0, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

а для любых  $r \in [0, 2/3]$  и целого  $n \in [0, 2]$

$$|\partial_x^n S(x, y)| + |\partial_y^n S(x, y)| \leq c(r)(1 + |y|)^{-r}(1 + |x|)^{r+n/2-1/4} \quad \forall x \leq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Обозначим через  $\eta(x)$  срезающую функцию, а именно, пусть  $\eta$  – бесконечно дифференцируемая неубывающая функция такая, что  $\eta(x) \equiv 0$  при  $x \leq 0$ ,  $\eta(x) \equiv 1$  при  $x \geq 1$ ,  $\eta(x) + \eta(1-x) \equiv 1$ . Условимся, в случае интегрирования по всей прямой  $\mathbb{R}$  и всей плоскости  $\mathbb{R}^2$  пределы интегрирования опускать.

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\delta \in (0, T)$ . Введем вспомогательные функции  $\varphi(t) \equiv \eta(2t/\delta - 1)$ ,  $\psi(x) = \eta(x - x_0 + 2)$ . Положим  $v(t, x, y) \equiv \partial^\nu u(t, x, y)\varphi(t)\psi(x)$ , где  $|\nu| = m - 1 \geq 1$ , тогда  $v(t, x, y)$  является решением (вообще говоря, в смысле обобщенных функций) в слое  $\Pi_T$  линейной задачи Коши

$$\begin{aligned} v_t + v_{xxx} + v_{xyy} = \partial^\nu f \varphi \psi - \sum_{|\nu_1| + |\nu_2| = |\nu|} c(\nu_1, \nu_2) \partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_x \varphi \psi + \partial^\nu u \varphi' \psi + 3\partial^\nu u_{xx} \varphi \psi' + \\ + 3\partial^\nu u_x \varphi \psi'' + \partial^\nu u \varphi \psi''' + \partial^\nu u_{yy} \varphi \psi' \equiv F(t, x, y), \quad v|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Используя фундаментальное решение  $G$  запишем функцию  $v$  в виде

$$v(t, x, y) = \int_0^t \iint G(t - \tau, x - \xi, y - \zeta) F(\tau, \xi, \zeta) d\xi d\zeta d\tau. \quad (9)$$

Оценим модуль непрерывности по  $x$  (модуль непрерывности по  $y$  оценивается полностью аналогично). Пусть  $\delta \leq t \leq T$ ,  $x_0 \leq x_1 < x_2 \leq x_1 + 1$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \partial^\nu u(t, x_2, y) - \partial^\nu u(t, x_1, y) = v(t, x_2, y) - v(t, x_1, y) = \\ = \int_0^t \iint (G(t - \tau, x_2 - \xi, y - \zeta) - G(t - \tau, x_1 - \xi, y - \zeta)) F(\tau, \xi, \zeta) d\xi d\zeta d\tau. \end{aligned}$$

Для оценки интеграла, содержащего функцию  $f$ , разобьем область интегрирования по  $\xi$  на три части:  $(x_0 - 2, x_1 - 1)$ ,  $(x_1 - 1, x_1 + R)$ ,  $(x_1 + R, +\infty)$  для некоторого  $R > 0$ .

Используя оценку (7) (так как  $x_1 - \xi \geq 1$ ), находим, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta/2}^t \int_{x_0-2}^{x_1-1} \int (G(t - \tau, x_2 - \xi, y - \zeta) - G(t - \tau, x_1 - \xi, y - \zeta)) \partial^\nu f \varphi \psi d\zeta d\xi d\tau \right| \leq \\ \leq (x_2 - x_1) \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int_{x_0-2}^{x_1-1} \int |G_x(t - \tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) \partial^\nu f| d\zeta d\xi d\tau d\theta \leq \\ \leq c(x_2 - x_1) \int_{\delta/2}^t \int_{x_0-2}^{+\infty} \int \frac{e^{-c_0(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}}}{(t - \tau)^{\frac{3}{4} + \frac{\sigma}{6}}} \frac{|\partial^\nu f|}{(1 + |\zeta - y|)} d\zeta d\xi d\tau \leq c_1(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Далее, т. к.  $\alpha - |\nu|/2 + 1/2 = \varepsilon/2 + 3/4$ , то в силу (8) ( $r = 1/2 + \sigma/2$ ,  $n = 0$ ,  $\sigma \in (0, \min(\varepsilon, 1/3))$ )

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta/2}^t \int_{x_1+R}^{+\infty} \int (G(t - \tau, x_2 - \xi, y - \zeta) - G(t - \tau, x_1 - \xi, y - \zeta)) \partial^\nu f \varphi \psi d\zeta d\xi d\tau \right| \leq \\ \leq c \int_{\delta/2}^t \int_{x_1+R}^{+\infty} \int \frac{(1 + |\zeta - y|)^{-\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2}}}{(t - \tau)^{\frac{3}{4} + \frac{\sigma}{6}}} (1 + \xi - x_1)^{\frac{1}{4} + \frac{\sigma}{2}} |\partial^\nu f| d\zeta d\xi d\tau \leq \\ \leq c_1(1 + R)^{-\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sigma}{2}} \sup_{\delta/2 \leq t \leq T} \left( \int_{x_0}^{+\infty} \int (1 + \xi - x_0)^{\frac{3}{2} + \varepsilon} (\partial^\nu f)^2 d\zeta d\xi \right)^{1/2} \leq c_2(1 + R)^{-\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sigma}{2}}. \end{aligned}$$

Для дальнейшей оценки заметим, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\delta/2}^t \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) \partial^\nu f \varphi \psi d\zeta d\xi d\tau \right| = \\ & = (x_2 - x_1) \left| \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int G(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) \partial^\nu f \varphi \Big|_{x_1-1}^{x_1+R} d\zeta d\tau d\theta - \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int G(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) \partial^\nu f_\xi \varphi d\zeta d\xi d\tau d\theta \right|. \end{aligned}$$

Здесь  $|\nu| + 1 = m \leq \nu_0$ , тогда, используя (8) ( $r = 1/2 + \sigma/2$ ,  $n = 0$ ,  $\sigma \in (0, \min(\varepsilon, 1/3))$ ), находим, что поскольку  $\alpha - (|\nu| + 1)/2 + 1/2 = \varepsilon/2 + 1/4$

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int G(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) \partial^\nu f_\xi \varphi d\zeta d\xi d\tau d\theta \right| \leq \\ & \leq c \int_{\delta/2}^t \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int \frac{(1 + |\zeta - y|)^{-\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2}}}{(t - \tau)^{\frac{3}{4} + \frac{\sigma}{6}}} (2 + \xi - x_1)^{\frac{1}{4} + \frac{\sigma}{2}} |\partial^\nu f_\xi| d\zeta d\xi d\tau \leq \\ & \leq c_1 (1 + R)^{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sigma}{2}} \sup_{\delta/2 \leq t \leq T} \left( \int_{x_0-1}^{+\infty} \int (2 + \xi - x_0)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} (\partial^\nu f_\xi)^2 d\zeta d\xi \right)^{1/2} \leq c_2 (1 + R)^{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sigma}{2}} \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int G(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) \partial^\nu f \varphi \Big|_{x_1-1}^{x_1+R} d\zeta d\tau d\theta \right| \leq \\ & \leq c \int_{\delta/2}^t \int \frac{(1 + |\zeta - y|)^{-\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2}}}{(t - \tau)^{\frac{3}{4} + \frac{\sigma}{6}}} \sup_{\theta \in [-1, R]} (2 + \theta)^{\frac{1}{4} + \frac{\sigma}{2}} |\partial^\nu f(t, x_1 + \theta, \zeta)| d\zeta d\tau \leq \\ & \leq c_1 \sup_{\delta/2 \leq t \leq T} \int_{-1}^{+\infty} \int (1 + |\zeta - y|)^{-\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2}} \times \\ & \times \left( (2 + \theta)^{\frac{1}{4} + \frac{\sigma}{2}} |\partial^\nu f(t, x_1 + \theta, \zeta)| + |((2 + \theta)^{\frac{1}{4} + \frac{\sigma}{2}} \partial^\nu f(t, x_1 + \theta, \zeta))_\theta| \right) d\zeta d\theta \leq \\ & \leq c_2 (1 + R)^{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sigma}{2}}. \end{aligned}$$

Объединяя полученные оценки находим, что

$$\begin{aligned} & \left| \int \int \int (G(t-\tau, x_2 - \xi, y - \zeta) - G(t-\tau, x_1 - \xi, y - \zeta)) \partial^\nu f \varphi \psi d\xi d\zeta d\tau \right| \leq \\ & \leq c \left( (1 + R)^{-\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sigma}{2}} + (x_2 - x_1) (1 + R)^{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sigma}{2}} \right) \leq c_1 (x_2 - x_1)^{\varepsilon - \sigma}, \end{aligned}$$

если положить  $1 + R = (x_2 - x_1)^{-2}$ .

Так как  $\varphi' = 0$  при  $t \notin [\delta/2, \delta]$  и в силу (3) свойства функции  $\partial^\nu u$  при  $t \in (\delta/2, T)$ ,  $x > x_0 - 2$  аналогичны свойствам функции  $\partial^\nu f$ , то интеграл

$$\int_0^t \int \int (G(t-\tau, x_2 - \xi, y - \zeta) - G(t-\tau, x_1 - \xi, y - \zeta)) \partial^\nu u \varphi' \psi d\xi d\zeta d\tau$$

оценивается аналогично.

Далее, оценим интегралы, содержащие нелинейные члены. Будем использовать то же разбиение области интегрирования по  $\xi$ , что и раньше. Из оценки (7) находим, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{x_0-2}^{x_1-1} \int (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) \partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_\xi \varphi \psi d\xi d\zeta d\tau \right| = \\ & = |x_1 - x_2| \left| \int_0^1 \int_{\frac{\delta}{2}}^t \int_{x_0-2}^{x_1-1} G_x(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y-\zeta) \partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_\xi \varphi \psi d\zeta d\xi d\tau d\theta \right| \leq \\ & \leq c_1(x_2 - x_1) \int_{\frac{\delta}{2}}^t \int_{x_0-2}^{+\infty} \int \frac{e^{-c_0(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}}}{(t-\tau)} |\partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_\xi| d\zeta d\xi d\tau \leq c_2(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Используя свойство (3) (заметим, что  $|\nu_1| \leq \nu_0$ ,  $|\nu_2| + 1 \leq \nu_0$ ) и оценку (8) ( $r = 0$ ,  $n = 0$ ) находим, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\delta/2}^t \int_{x_1+R}^{+\infty} \int (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) \partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_\xi \varphi \psi d\zeta d\xi d\tau \right| \leq \\ & \leq c_1 \int_{\delta/2}^t \int_{x_1+R}^{+\infty} \int \frac{(1 + \xi - x_1)^{-\frac{1}{4}}}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}} |\partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_\xi| d\zeta d\xi d\tau \leq c_3(1 + R)^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Для оставшегося интеграла сначала рассмотрим случай  $0 < \varepsilon \leq 4/5$ . Разобьем в нем область интегрирования по  $\tau$  на две части. Для  $s \in (0, t - \delta/2)$  используя оценку (8) при  $r = 0$ ,  $n = 1$  и свойство (3), находим что

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\delta/2}^{t-s} \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) \partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_\xi \varphi \psi d\zeta d\xi d\tau \right| = \\ & = (x_2 - x_1) \left| \int_0^1 \int_{\delta/2}^{t-s} \int_{x_1-1}^{x_1+R} G_x(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y-\zeta) \partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_\xi \varphi d\zeta d\xi d\tau d\theta \right| \leq \\ & \leq c_1(x_2 - x_1) \int_{\delta/2}^{t-s} \int_{x_0-1}^{+\infty} \int \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{13}{12}}} (2 + \xi - x_1)^{\frac{1}{4}} |\partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_\xi| d\zeta d\xi d\tau \leq c_2(x_2 - x_1) s^{-\frac{1}{12}}, \end{aligned}$$

и, наконец, используя оценку (8) для  $r = 0$ ,  $n = 0$ , находим, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t-s}^t \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) \partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_\xi \varphi \psi d\zeta d\xi d\tau \right| \leq \\ & \leq c \int_{t-s}^t \int_{x_0-1}^{+\infty} \int \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}} |\partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_\xi| d\zeta d\xi d\tau \leq c_1 s^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Из полученных оценок следует, что при  $0 < \varepsilon \leq 4/5$

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \iiint (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) \partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_\xi \varphi \psi d\xi d\zeta d\tau \right| \leq \\ & \leq c((1 + R)^{-\frac{1}{4}} + (x_2 - x_1) s^{-\frac{1}{12}} + s^{\frac{1}{3}}) \leq c(x_2 - x_1)^{\frac{4}{5}} \leq c(x_2 - x_1)^\varepsilon, \end{aligned}$$

если положить  $s = (x_2 - x_1)^{12/5}$ ,  $1 + R = (x_2 - x_1)^{-16/5}$ .

Пусть теперь  $4/5 < \varepsilon < 1$ . Заметим, что в данном случае поскольку  $2\alpha - m + 1/2 =$

$= \varepsilon > 4/5$ , то  $m + 1 \leq \nu_0$  и тогда  $|\nu_2| + 2 \leq \nu_0$ . Имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\delta/2}^t \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) \partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_{\xi} \varphi d\zeta d\xi d\tau \right| = \\ & = (x_2 - x_1) \left| \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int G(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) \partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_{\xi} \Big|_{x_1-1}^{x_1+R} \varphi d\zeta d\tau d\theta - \right. \\ & \left. - \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int G(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) (\partial^{\nu_1} u_{\xi} \partial^{\nu_2} u_{\xi} + \partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_{\xi\xi}) \varphi d\zeta d\xi d\tau d\theta \right|. \end{aligned}$$

Используя (3) и (8) ( $r = 0$ ,  $n = 0$ ) находим, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int G(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) (\partial^{\nu_1} u_{\xi} \partial^{\nu_2} u_{\xi} + \partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_{\xi\xi}) d\zeta d\xi d\tau d\theta \right| \leq \\ & \leq c \int_{\delta/2}^t \int_{x_0-1}^{+\infty} \int \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}} ((\partial^{\nu_1} u)^2 + (\partial^{\nu_1} u_{\xi})^2 + (\partial^{\nu_2} u_{\xi})^2 + (\partial^{\nu_2} u_{\xi\xi})^2) d\zeta d\xi d\tau \leq c_1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int G(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) \partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_{\xi} \Big|_{x_1-1}^{x_1+R} d\zeta d\tau d\theta \right| \leq \\ & \leq c \sup_{\delta/2 \leq t \leq T} \int_{x_0-1}^{+\infty} \int (|\partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_{\xi}| + |\partial^{\nu_1} u_{\xi} \partial^{\nu_2} u_{\xi}| + |\partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_{\xi\xi}|) d\zeta d\xi \leq c_1. \end{aligned}$$

В итоге получаем, что если положить  $1 + R = (x_2 - x_1)^{-4}$ , то в случае  $\varepsilon > 4/5$

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \iint (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) \partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_{\xi} \varphi \psi d\zeta d\xi d\tau \right| \leq \\ & \leq c((x_2 - x_1) + (1 + R)^{-\frac{1}{4}}) \leq c_1(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Наконец, поскольку  $\text{supp } \psi' \subset [x_0 - 2, x_0 - 1]$ , интегрируя по частям и используя оценку (7) находим, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\delta/2}^t \int_{x_0-2}^{+\infty} \int (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) (3\partial^{\nu} u_{\xi\xi} \psi' + \right. \\ & \quad \left. + 3\partial^{\nu} u_{\xi} \psi'' + \partial^{\nu} u \psi''' + \partial^{\nu} u_{\zeta\zeta} \psi') d\zeta d\xi d\tau \right| = \\ & = (x_2 - x_1) \left| \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int_{x_0-2}^{x_0-1} \int G_{\xi}(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) (3\partial^{\nu} u_{\xi\xi} \psi' + \right. \\ & \quad \left. + 3\partial^{\nu} u_{\xi} \psi'' + \partial^{\nu} u \psi''' + \partial^{\nu} u_{\zeta\zeta} \psi') d\zeta d\xi d\tau \right| \leq \\ & \leq (x_2 - x_1) \left| \int_{\delta/2}^t \int_{x_0-2}^{x_0-1} \int (3(G_{\xi} \psi')_{\xi\xi} - 3(G_{\xi} \psi'')_{\xi} + G_{\xi} \psi''' + G_{\xi\zeta\zeta} \psi') \partial^{\nu} u d\zeta d\xi d\tau \right| \leq \\ & \leq c_1(x_2 - x_1) \int_{\delta/2}^t \int_{x_0-2}^{x_0-1} \int \frac{e^{-c_0(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}}}{(t-\tau)^{\frac{5}{3}}(1+|\zeta-y|)} |\partial^{\nu} u| d\zeta d\xi d\tau \leq c_2(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Объединяя полученные оценки всех слагаемых из правой части равенства (9), выводим неравенство (5).

Оценка модуля непрерывности по  $t$  вытекает из результатов работы [7] и уже полученных оценок модуля непрерывности по пространственным переменным.

Введем последовательности параллелепипедов  $Q_{nl} = [\delta, T] \times [x_0 + n, x_0 + n + 1] \times [-l - 1, l + 1]$  и  $Q'_{nl} = [\delta, T] \times [x_0 + n - 1/2, x_0 + n + 3/2] \times [-l - 3/2, l + 3/2]$  где  $n, l = 0, 1, \dots$ . Пусть сначала  $j = 0$ , то есть  $|\nu| = m - 1$ ,  $\varepsilon = 2\alpha - |\nu| - 1/2 = 2\alpha - m + 1/2 \in (0, 1)$ . Положим  $w(t, x, y) \equiv \partial^\nu u(t, x, y)$ . Из самого уравнения (1) следует, что

$$w_t = -w_{xxx} - w_{xyy} - \partial^\nu (u^2/2)_x + \partial^\nu f.$$

Из уже доказанной оценки (5) следует, что  $|w(t, x_2, y_2) - w(t, x_1, y_1)| \leq c(|x_1 - x_2|^{\varepsilon - \sigma} + |y_1 - y_2|^{\varepsilon - \sigma})$  при  $(t, x_1, y_1), (t, x_2, y_2) \in Q'_{nl}$ . В силу (4)  $\|w\|_{L_\infty(Q'_{nl})} \leq \text{const}$ ,  $\|\partial^\nu (u^2/2)\|_{L_\infty(Q'_{nl})} \leq \text{const}$ . Кроме того,  $\|\partial^\nu f\|_{L_\infty(\delta, T; L_2(Q'_{nl}))} \leq \text{const}$ . В обозначениях статьи [7]  $A_{(3,0)} = A_{(1,2)} = w$ ,  $A_{(1,0)} = \partial^\nu (u^2/2)$ ,  $A_{(0,0)} = \partial^\nu f$ ,  $\omega(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) = |x_1 - x_2|^{\varepsilon - \sigma} + |y_1 - y_2|^{\varepsilon - \sigma}$ . Тогда в силу теоремы 1 и замечания 5 из [7] при  $(t, x, y), (t + \tau, x, y) \in Q_{nl}$

$$|w(t + \tau, x, y) - w(t, x, y)| \leq c \inf_{0 < h < 1/2} (h^{\varepsilon - \sigma} + \tau h^{\varepsilon - \sigma - 3} + \tau h^{-1})$$

и положив  $h = \tau^{1/3}$ , получаем требуемую оценку. Пусть теперь  $j = 1$ ,  $|\nu| = m - 2$ . Тогда в каждом прямоугольнике  $Q'_{nl}$  функция  $w$  является обобщенным решением уравнения

$$w_t = -w_{xxx} - w_{xyy} - \partial^\nu (uu_x) + \partial^\nu f, \quad (10)$$

кроме того, уже доказано, что

$$|w_x(t + \tau, x, y) - w_x(t, x, y)| + |w_y(t + \tau, x, y) - w_y(t, x, y)| \leq c\tau^{\frac{\varepsilon - \sigma - 1}{3}} \quad (11)$$

при  $(t + \tau, x, y), (t, x, y) \in Q'_{nl}$ . В силу (4)  $\|\partial^\nu (uu_x)\|_{L_\infty(Q'_{nl})} \leq \text{const}$ . В обозначениях [7] возьмем  $A_{(2,0)} = A_{(0,2)} = w_x$ ,  $A_{(0,0)} = -\partial^\nu (uu_x) + \partial^\nu f$ . Тогда в силу теоремы 1 и замечаний 2, 4, 5 из [7] при  $(t, x, y), (t + \tau, x, y) \in Q_{nl}$

$$|w(t + \tau, x, y) - w(t, x, y)| \leq \inf_{0 < h < 1/2} (h \tau^{\frac{\varepsilon - \sigma - 1}{3}} + \tau h^{\varepsilon - \sigma - 3} + \tau).$$

Положив  $h = \tau^{1/3}$  получим оценку (6) для данного значения  $j$ . Пусть теперь  $j = 2$ ,  $|\nu| = m - 3$ . Тогда в каждом прямоугольнике  $Q'_{nl}$  функция  $w$  является обобщенным решением уравнения (10) и справедливо неравенство (11). В обозначениях [7] возьмем  $A_{(1,0)} = w_{xx}$ ,  $A_{(0,1)} = w_{xy}$ ,  $A_{(0,0)} = -\partial^\nu (u u_x) + \partial^\nu f$ . Тогда полностью аналогично предыдущему случаю выводим оценку (6) и при  $j = 2$ . Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е 1.** Полученные результаты аналогичны результатам работ [5, 6] для задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза за исключением введения константы  $\sigma$ . В работе [8] такие же результаты о внутренней регулярности решений задачи (1), (2) установлены в случае начальной функции  $u_0 \in L_2^\alpha$ , но для рассмотренных там классов решений неизвестны результаты о единственности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. О трехмерных солитонах // Журн. exper. теорет. физ. 1974. Т. 66. № 2. С. 594–597.
2. Фаминский А.В. Задача Коши для уравнения Захарова–Кузнецова // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 6. С. 1070–1081.
3. Levandosky J.L. Smoothing properties of nonlinear dispersive equations in two spatial dimensions // J. Differential Equ. 2001. V. 175. № 2. P. 275–352.

4. *Faminskii A.V., Antonova A.P.* On internal regularity of solutions to the initial value problem for the Zakharov–Kuznetsov equation // Progress in Partial Differential Equations, M. Reissig, M. Ruzhansky (eds.), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2013. V. 44. P. 53–74.
5. *Кружков С.Н., Фаминский А.В.* Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза // Матем. сборник. 1983. Т. 120. № 3. С. 396–425.
6. *Фаминский А.В.* Задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза и его обобщений // Труды сем. им. И.Г. Петровского. 1988. Т. 13. С. 56–105.
7. *Кружков С.Н., Фаминский А.В.* О свойствах непрерывности решений некоторых классов нестационарных уравнений // Вестник Моск. ун-та, сер. 1, Математика, Механика. 1983. Т. 3. С. 29–34.
8. *Антонова А.В., Фаминский А.В.* О регулярности решений задачи Коши для уравнения Захарова–Кузнецова в нормах Гёльдера // Матем. заметки. 2015. Т. 97. Вып. 1. С. 13–22.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках реализации государственного задания министерства образования и науки РФ в сфере научной деятельности (код проекта 1.333.2014/К).

Поступила в редакцию 11 июня 2015 г.

#### Antonova A.P., Faminskii A.V. ON INTERNAL REGULARITY OF SOLUTIONS TO THE INITIAL VALUE PROBLEM FOR THE ZAKHAROV–KUZNETSOV EQUATION

Internal regularity of weak solutions to the initial value problem for the Zakharov–Kuznetsov equation in the case of two spatial variables is considered. Results on existence of derivatives continuous in Hölder norms are established.

*Key words:* Zakharov–Kuznetsov equation; initial value problem; internal regularity of solutions.

Антонова Анастасия Петровна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, аспирант кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: antonova-nastya@mail.ru

Antonova Anastasiya Petrovna, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: antonova-nastya@mail.ru

Фаминский Андрей Вадимович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: afaminskii@sci.pfu.edu.ru

Faminskii Andrei Vadimovich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: afaminskii@sci.pfu.edu.ru

УДК 621.311+519.642

### ОБ УПРАВЛЕНИИ ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРОЙ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ЭЭС РОССИИ

© А.С. Апарцин, Е.В. Маркова, И.В. Сидлер, В.В. Труфанов

*Ключевые слова:* интегральная модель; оптимизация; электроэнергетика.

Одной из актуальных проблем современной электроэнергетики является старение генерирующего оборудования, в связи с этим увеличиваются затраты на поддержание его в рабочем состоянии. Настоящая работа посвящена поиску и исследованию оптимальных стратегий замены устаревающего генерирующего оборудования в интегральной модели развития электроэнергетической системы (ЭЭС) России.