УДК 517.977.52
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-40-55

УТОЧНЕНИЕ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ И НЕРАВЕНСТВ

© **А. В. Горбачева, Д. Ю. Карамзин**

Исследуется свойство непрерывности меры-множителя Лагранжа из принципа максимума Понтрягина для задач управления с фазовыми ограничениями. Доказано, что при определенных условиях регулярности функция распределения меры является гельдеровой с показателем $1/2$.
Ключевые слова: оптимальное управление; принцип максимума; фазовые ограничения.

1. Введение

В работе исследуется свойство непрерывности меры-множителя Лагранжа, возникающей в принципе максимума Понтрягина для задачи с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств. За отправную точку нашего исследования берется принцип максимума в форме Р.В. Гамкрелидзе (см. [1]–[5]). Однако без априорных предположений регулярности мало что можно сказать о свойствах этой меры. Принимая во внимание специального вида условия регулярности (они являются дальнейшим развитием условий регулярности из [1]), мы показываем, что функция распределения меры непрерывна, и кроме того даже гельдерова с показателем $1/2$.

Вопрос непрерывности или абсолютной непрерывности меры-множителя Лагранжа является важным для различных приложений, особенно для некоторых проблем механики и задач кинематического управления (см., например, [6]–[8]). Скорость в таких задачах рассматривается как фазовая переменная. Если модуль скорости ограничен сверху или снизу, то это приводит к фазовым ограничениям и к мере-множителю Лагранжа в необходимых условиях оптимальности. Методы, которые обычно используются для решения таких задач, как правило, подразумевают абсолютную непрерывность или даже гладкость этой меры. Поэтому предлагаемое в этой статье направление исследования может представлять интерес не только с чисто теоретической точки зрения, но и оказаться полезным для приложений.

2. Постановка задачи и основные определения

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления

$$\begin{cases} \Phi(p,u(\cdot)):=e_0(p)+\int_{t_1}^{t_2}\varphi_0(x,u,t)dt\to\min, \\ \dot{x}=\varphi(x,u,t),\ t\in[t_1,t_2],\ t_1<t_2, \\ g_1(x,t)=0,\ g_2(x,t)\le 0, \\ r(x,u,t)\le 0, \\ e_1(p)=0,\ e_2(p)\le 0, \\ p=(x_1,x_2,t_1,t_2). \end{cases} \tag{1}$$

Будем считать, что вектор-функции r, e_i, g_i принимают значения в евклидовых пространствах размерности $d(r)$, $d(e_i)$, $d(g_i)$ соответственно, функции e_0, φ_0, φ являются скалярными, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $t \in [t_1, t_2]$ – время (концы времени t_1 и t_2 не предполагаются фиксированными), x есть фазовая переменная из n-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$, и $u \in \mathbb{R}^m$ – переменная управления. Вектор $p \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ называется *концевым.* Управляющая функция, или просто *управление*, есть измеримая существенно ограниченная функция $u(\cdot)$, т. е. элемент пространства $L_\infty([t_1, t_2])$.

Предположим, что функции e_0, e_i, φ_0, φ непрерывно дифференцируемы, функции g_i дважды непрерывно дифференцируемы, а функции φ, φ_0, r дважды непрерывно дифференцируемы по u для всех x, t.

Определение 1. Пусть $u(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ – управление, а $x(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ – соответствующая этому управлению траектория, то есть $\dot{x} = \varphi(x(t), u(t), t)$, и p – соответствующий концевой вектор. Допустимым процессом будем называть тройку (p, x, u), если она удовлетворяет

- концевым ограничениям: $e_1(p) = 0$, $e_2(p) \leq 0$,
- смешанным ограничениям: $r(x(t), u(t), t) \leq 0$ для п.в. $t \in [t_1, t_2]$, и
- фазовым ограничениям $g_1(x(t), t) = 0$, $g_2(x(t), t) \leq 0$ $\forall\, t \in [t_1, t_2]$.

Определение 2. Будем говорить, что допустимый процесс оптимален, если значение функционала Φ является наименьшим на множестве всех допустимых процессов.

Определение 3. Концевые ограничения называются регулярными в точке $p = (x_1, x_2, t_1, t_2)$: $e_1(p) = 0$, $e_2(p) \leq 0$, если

$$\operatorname{rank} \frac{\partial e_1}{\partial p}(p) = d(e_1),\ \exists\, d \in \operatorname{Ker} \frac{\partial e_1}{\partial p}(p):\ \Big\langle \frac{\partial e_2^j}{\partial p}(p), d \Big\rangle > 0\ \ \forall\, j:\ e_2^j(p) = 0.$$

(Верхние индексы означают координаты вектора или вектор-функции).

Определение 4. Смешанные ограничения называются регулярными, если для любых (x, u, t): $r(x, u, t) \leq 0$ существует вектор $q = q(x, u, t)$ такой, что

$$\Big\langle \frac{\partial r^j}{\partial u}(x, u, t), q \Big\rangle > 0\ \ \forall\, j : r^j(x, u, t) = 0. \tag{2}$$

Определение 5. Фазовые ограничения называются регулярными, если для любых (x, t): $g_1(x, t) = 0$, $g_2(x, t) \leq 0$, имеет место

$$\operatorname{rank} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, t) = d(g_1), \quad \exists\, z = z(x, t) \in \operatorname{Ker} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, t):$$

$$\big\langle \frac{\partial g_2^j}{\partial x}(x, t), z \big\rangle > 0 \quad \forall j : g_2^j(x, t) = 0.$$

Определение 6. Фазовые ограничения называются согласованными с концевыми ограничениями в точке p^*, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\{p \in \mathbb{R}^{2n+2}:\ |p^* - p| \leq \varepsilon,\ e_1(p) = 0,\ e_2(p) \leq 0\} \subseteq$$

$$\{p:\ g_1(x_1, t_1) = 0,\ g_2(x_1, t_1) \leq 0,\ g_1(x_2, t_2) = 0,\ g_2(x_2, t_2) \leq 0\}.$$

Определение 7. Будем говорить, что в концевых точках выполнены условия управляемости относительно фазовых ограничений, если для $s = 1, 2$,

$$\exists\, \varphi_s \in \operatorname{conv} \varphi(x_s^*, U(x_s^*, t_s^*), t_s^*):$$
$$(-1)^s \left[\Big\langle \frac{\partial g_2^j}{\partial x}(x_s^*, t_s^*), \varphi_s \Big\rangle + \frac{\partial g_2^j}{\partial t}(x_s^*, t_s^*) \right] > 0,\ \forall\, j \in J(x_s^*, t_s^*).$$

Пусть (p^*,x^*,u^*) допустимый процесс в задаче (1). Здесь $p^*=(x_1^*,x_2^*,t_1^*,t_2^*)$. Введем необходимые обозначения:

$$J(x,t)=\{j:g_2^j(x,t)=0\},\ \ I(x,u,t)=\{i:\,r^i(x,u,t)=0\},$$

$$\Gamma_i(x,u,t)=\frac{\partial g_i}{\partial x}(x,t)\varphi(x,u,t)+\frac{\partial g_i}{\partial t}(x,t),\ \ i=1,2,$$

$$U(x,t)=\{u\in\mathbb{R}^m:\,r(x,u,t)\le 0,\,\Gamma_1(x,u,t)=0\},$$

$$T=[t_1^*,t_2^*],\ \ \Gamma=(\Gamma_1,\Gamma_2),\ \ g=(g_1,g_2).$$

Пусть $\xi(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ заданная измеримая ограниченная функция.

О п р е д е л е н и е 8. Замыканием справа по мере функции $\xi(t)$ в точке τ называется множество $\Xi^+(\tau)$ таких векторов $u\in\mathbb{R}^m$ что

$$\ell\Big(\{t\in[\tau,\tau+\varepsilon]:\,\xi(t)\in B_\varepsilon(u)\}\Big)>0\ \ \forall\,\varepsilon>0.$$

Здесь, $B_\varepsilon(u)=\{v\in\mathbb{R}^m:|v-u|\le\varepsilon\}$, и ℓ – мера Лебега на $\mathbb{R}$. Соответственно, замыкание слева – это множество $\Xi^-(\tau)$ таких векторов $u\in\mathbb{R}^m$ что

$$\ell\Big(\{t\in[\tau-\varepsilon,\tau]:\,\xi(t)\in B_\varepsilon(u)\}\Big)>0\ \ \forall\,\varepsilon>0.$$

Многозначное отображение $\Xi(t):=\Xi^-(t)\cup\Xi^+(t)$, где $t\in\mathbb{R}$, называется замыканием $\xi(t)$ по мере Лебега.[1]

Рассмотрим некоторые свойства замыкания по мере. Обозначим через $\mathcal{U}(t)$ замыкание по мере функции $u^*(t)$. Будем считать, что $\mathcal{U}^-(t_1^*)=\mathcal{U}^+(t_1^*)$, $\mathcal{U}^+(t_2^*)=\mathcal{U}^-(t_2^*)$.

П р е д л о ж е н и е 1. Справедливы следующие свойства:

a) $\mathcal{U}^-(t)\ne\varnothing$, $\mathcal{U}^+(t)\ne\varnothing\ \ \forall\,t\in T$;

b) $\mathcal{U}(t)\subseteq U(t)\ \ \forall\,t\in T$;

c) отображение $\mathcal{U}(t)$ полунепрерывно сверху;

d) $u^*(t)\in\mathcal{U}(t)$ для п.в. $t\in T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойства a), b) и c) легко вывести из определения. Свойство d) следует из теоремы Данжуа[2] и следующего утверждения. □

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть $\tau\in(t_1^*,t_2^*)$. Вектор $u_*\in\mathbb{R}^m$ принадлежит множеству $\mathcal{U}^+(\tau)$ тогда и только тогда, когда существует измеримое множество E^+: $E^+\cap[t_1^*,\tau]=\varnothing$, такое что

i) $\ell(E^+\cap[\tau,\tau+\varepsilon])>0\ \ \forall\,\varepsilon>0$;

ii) $\lim\limits_{t\xrightarrow{E^+}\tau}u^*(t)=u_*$.[3]

Аналогично, $u_*\in\mathcal{U}^-(\tau)\ \ \Leftrightarrow\ \ \exists\,E^-:\ \ E^-\cap[\tau,t_2^*]=\varnothing$, $\ell(E^-\cap[\tau-\varepsilon,\tau])>0\ \ \forall\,\varepsilon>0$, и $\lim\limits_{t\xrightarrow{E^-}\tau}u^*(t)=u_*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что из i) и ii) следует, что $u_*\in\mathcal{U}^+(\tau)$ в силу определения замыкания по мере. В обратную сторону: пусть $u_*\in\mathcal{U}^+(\tau)$, докажем i) и ii). Обозначим

$$E_n^+=\left\{t\in[\tau,t_2^*]:\,|u^*(t)-u_*|\le\frac{1}{n}\right\}.$$

[1] Термин “замыкание по мере” был впервые введен А.Я. Дубовицким и А.А. Милютиным в [9].

[2] Измеримая конечная функция аппроксимативно непрерывна почти всюду, [10].

[3] Символ $\lim\limits_{t\xrightarrow{S}\tau}$ означает, что предел берется только по точкам из S.

Выберем строго монотонно убывающую и стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел α_n, такую что

$$\ell(E_n^+ \cap [\alpha_{n+1}, \alpha_n]) > 0 \ \ \forall\, n.$$

Такой выбор осуществим в силу замыкания по мере и того факта, что $E_k^+ \subseteq E_n^+ \ \ \forall\, k > n$.

Рассмотрим множество

$$E^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+ \cap [\tau + \alpha_{n+1}, \tau + \alpha_n]\,.$$

Множество E^+, очевидно, измеримо и удовлетворяет i) и ii) по построению. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и слева от точки τ. $\square$

Будем использовать эти свойства ниже.

Введем определение регулярного процесса.

Определение 9. Допустимый процесс (p^*, x^*, u^*) называется регулярным, если для любых $t \in T$, $u \in \mathcal{U}(t)$, векторы $\frac{\partial \Gamma_1^j}{\partial u}(x^*(t), u, t)$, $j = 1, ..., d(g_1)$, $\frac{\partial r^i}{\partial u}(x^*(t), u, t)$, $i \in I(x^*(t), u, t)$ линейно независимы, и существует вектор $d = d(u,t) \in \mathbb{R}^m$ такой, что $d \in \mathrm{Ker}\, \frac{\partial r^i}{\partial u}(x^*(t), u, t)$ $\forall\, i \in I(x^*(t), u, t)$, $d \in \mathrm{Ker}\, \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u}(x^*(t), u, t)$,

$$\left\langle \frac{\partial \Gamma_2^j}{\partial u}(x^*(t), u, t), d \right\rangle > 0 \ \ \forall\, j \in J(x^*(t), t). \tag{3}$$

Наряду с определением регулярного процесса ниже нам также понадобится понятие регулярной точки множества $U(x,t)$. В отличие от регулярности процесса это понятие никак не связано с фазовыми ограничениями типа неравенств.

Определение 10. Назовем точку $u \in U(x,t)$ регулярной, если $\mathrm{rank}\, \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u}(x, u, t) = d(g_1)$, и существует вектор $q \in \mathrm{Ker}\, \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u}(x, u, t)$ такой, что

$$\left\langle \frac{\partial r^i}{\partial u}(x, u, t), q \right\rangle > 0 \ \ \forall\, i \in I(x, u, t).$$

Подмножество всех регулярных точек множества $U(x,t)$ обозначим через $U_R(x,t)$. Положим $\Omega(x,t) := \mathrm{cl} U_R(x,t)$ (cl обозначает замыкание). Отметим, что если процесс регулярен, то $\mathcal{U}(t) \subseteq U_R(x^*(t), t) \ \ \forall\, t \in T$, и значит все близкие точки из некоторой его окрестности регулярны. В частности смешанные ограничения будут регулярными в некоторой окрестности регулярного процесса. Отсюда, поскольку $\mathcal{U}(t) \neq \varnothing \ \ \forall\, t \in T$, также следует, что $\Omega(x^*(t), t) \neq \varnothing$ $\forall\, t \in T$. Будем неявно (т. е. не ссылаясь на них каждый раз) использовать эти факты ниже.

Рассмотрим расширенную функцию Гамильтона–Понтрягина

$$\bar{H}(x, u, \psi, \mu, \lambda^0, t) = \big\langle \psi, \varphi(x, u, t) \big\rangle - \big\langle \mu, \Gamma(x, u, t) \big\rangle - \lambda^0 \varphi_0(x, u, t),$$

где $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, и малый Лагранжиан

$$l(p, \lambda) = \lambda^0 e_0(p) + \big\langle \lambda^1, e_1(p) \big\rangle + \big\langle \lambda^2, e_2(p) \big\rangle, \quad \lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2).$$

Определение 11. Будем говорить, что допустимый процесс (p^*, x^*, u^*) в задаче (1) удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, если существует вектор $\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2)$: $\lambda^0 \in \mathbb{R}$, $\lambda^1 \in \mathbb{R}^{d(e_1)}$, $\lambda^2 \in \mathbb{R}^{d(e_2)}$, $\lambda^0 \geq 0$, $\lambda^2 \geq 0$, $\big\langle \lambda^2, e_2(p^*) \big\rangle = 0$, абсолютно непрерывная функция

$\psi\colon\ T\to\mathbb{R}^n$, функция $\mu=(\mu_1,\mu_2)\colon\ T\to\mathbb{R}^{d(g)}$ и измеримая ограниченная функция $\nu:\ T\to\mathbb{R}^{d(r)}$ такие, что

$$\text{либо}\ \ \lambda^0+|\mu_2(t_1^*)|>0,\ \ \text{либо}\ \ \psi(t)\notin\operatorname{im}\frac{\partial g_1^*}{\partial x}(t)\ \forall t\in T, \tag{4}$$

$$\dot\psi=-\frac{\partial\bar H}{\partial x}(t)+\nu(t)\frac{\partial r}{\partial x}(t)\ \text{п.в.}\ t, \tag{5}$$

$$\psi(t_s^*)=(-1)^{s+1}\frac{\partial l}{\partial x_s}(p^*,\lambda)+\mu_2(t_s^*)\frac{\partial g_2}{\partial x_s}(t_s^*),\ \ s=1,2, \tag{6}$$

$$\max_{u\in\Omega(t)}\bar H(u,t)=\bar H(t)\ \text{п.в.}\ t, \tag{7}$$

$$\dot h=\frac{\partial\bar H}{\partial t}(t)-\nu(t)\frac{\partial r}{\partial t}(t)\ \text{п.в.}\ t, \tag{8}$$

$$h(t_s^*)=(-1)^s\frac{\partial l}{\partial t_s}(p^*,\lambda)-\mu_2(t_s^*)\frac{\partial g_2}{\partial t}(t_s^*),\ \ s=1,2, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\bar H}{\partial u}(t)=\nu(t)\frac{\partial r}{\partial u}(t)\ \text{п.в.}\ t, \tag{10}$$

$$\langle\nu(t),r(t)\rangle=0,\ \nu(t)\geq0\ \text{п.в.}\ t, \tag{11}$$

где $h(t):=\max_{u\in\Omega(t)}\bar H(u,t)$.

Более того, функция $h(t)$ абсолютно непрерывна на T , а вектор-функция $\mu=(\mu_1,\mu_2)$ удовлетворяет следующим свойствам:

а) каждая из функций μ_2^j постоянна на каждом отрезке времени $[a,b]$, на котором траектория $x^*(t)$ целиком лежит во внутренности фазового множества, задаваемого j -ым фазовым ограничением-неравенством, т.е. когда $g_2^j(t)<0\ \ \forall\,t\in[a,b]$;

б) вектор-функция μ_2 непрерывна слева на интервале (t_1^*,t_2^*) , и $\mu_2(t_2^*)=0$;

в) каждая из функций μ_2^j (нестрого) монотонно убывает;

г) вектор-функция μ_1 измерима и ограничена на T .

Процесс (p^*,x^*,u^*) , удовлетворяющий принципу максимума называется экстремалью, а набор (λ,ψ,μ,ν) – множителями Лагранжа, отвечающими процессу (p^*,x^*,u^*) в силу принципа максимума.

В работе приняты следующие соглашения относительно обозначений. Во-первых, если у отображений $\bar H,g,r,\varphi,\Omega$, и т. п., или их производных какие-нибудь из аргументов опущены, то вместо них подставлены значения $x^*(t),u^*(t)$ или множители Лагранжа $\psi(t),\mu(t),\lambda$. Во-вторых, все множители Лагранжа или элементы сопряженных пространств рассматриваются как вектор-строки, в то время как вектор-функции или векторы, такие как φ,x,u , рассматриваются как вектор-столбцы. Градиенты функций считаются элементами сопряженных пространств. Элементы матрицы Якоби $F(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ имеют вид $\frac{\partial F^i}{\partial x_j}(x)$, и ее строками являются градиенты координатных функций F^i .

В работе [4] была получена следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Пусть процесс (p^*,x^*,u^*) оптимален в задаче (1). Предположим, что $\mathcal{U}(t)\subseteq U_R(x^*(t),t)\ \ \forall\,t\in T$, концевые ограничения регулярны, фазовые ограничения регулярны и согласованы с концевыми в точке p^* . Тогда процесс (p^*,x^*,u^*) удовлетворяет принципу максимума.

3. Гельдеровость $\mu_2(t)$

В этом разделе будут рассмотрены различные условия, гарантирующие непрерывность меры-множителя Лагранжа $\mu_2(t)$ из принципа максимума.

Пусть $t_* \in (t_1^*, t_2^*)$. Обозначим через $\mathcal{D}^+(t_*)$ множество всевозможных пределов справа траектории x^* в точке t_*:

$$\mathcal{D}^+(t_*) = \operatorname*{Limsup}_{\Delta t \to 0+} \frac{x^*(t_* + \Delta t) - x^*(t_*)}{\Delta t}.$$

Таким образом, множество $\mathcal{D}^+(t_*)$ – это, в определенном смысле, обобщенная производная справа x^* в точке t_*. Если производная справа существует в классическом смысле, то это множество состоит только из одного элемента – значения производной.

Аналогично, множество

$$\mathcal{D}^-(t_*) = \operatorname*{Limsup}_{\Delta t \to 0-} \frac{x^*(t_* + \Delta t) - x^*(t_*)}{\Delta t}$$

является обобщенной производной траектории слева.

Введем следующие понятия. Будем говорить, что траектория выходит гладким образом на границу j-ого фазового ограничения в точке t_*, $j \in J(t_*)$, если

$$\Big\langle \frac{\partial g_2^j}{\partial x}(t_*), v \Big\rangle + \frac{\partial g_2^j}{\partial t}(t_*) = 0 \ \ \forall\, v \in \mathcal{D}^-(t_*).$$

В противном случае будем говорить, что траектория выходит на границу негладко.

Аналогично, когда

$$\Big\langle \frac{\partial g_2^j}{\partial x}(t_*), v \Big\rangle + \frac{\partial g_2^j}{\partial t}(t_*) = 0 \ \ \forall\, v \in \mathcal{D}^+(t_*),$$

будем говорить, что траектория гладко сходит с границы.

Заметим, что справедливы неравенства

$$\Big\langle \frac{\partial g_2^j}{\partial x}(t_*), v \Big\rangle + \frac{\partial g_2^j}{\partial t}(t_*) \geq 0 \ \forall\, v \in \mathcal{D}^-(t_*) \ \forall\, j \in J(t_*),$$
$$\Big\langle \frac{\partial g_2^j}{\partial x}(t_*), v \Big\rangle + \frac{\partial g_2^j}{\partial t}(t_*) \leq 0 \ \forall\, v \in \mathcal{D}^+(t_*) \ \forall\, j \in J(t_*),$$

которые следуют из допустимости траектории.

Таким образом, выход на границу j-ого фазового ограничения будет негладким, если существует вектор $v \in \mathcal{D}^-(t_*)$ такой, что $\big\langle \frac{\partial g_2^j}{\partial x}(t_*), v \big\rangle + \frac{\partial g_2^j}{\partial t}(t_*) > 0$. Точно также негладкий сход с границы j-ого фазового ограничения эквивалентен существованию вектора $v \in \mathcal{D}^+(t_*)$ такого, что $\big\langle \frac{\partial g_2^j}{\partial x}(t_*), v \big\rangle + \frac{\partial g_2^j}{\partial t}(t_*) < 0$. Будем использовать это ниже.

Следующее утверждение раскрывает важную связь между обобщенными производными (справа и слева) и замыканием по мере.

П р е д л о ж е н и е 3. Справедливы следующие условия:

$$\mathcal{D}^+(t_*) \subseteq \operatorname{conv} \varphi(\mathcal{U}^+(t_*), t_*), \ \ \mathcal{D}^-(t_*) \subseteq \operatorname{conv} \varphi(\mathcal{U}^-(t_*), t_*).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. См. Предложение 2 в [11].

В случае, когда управление кусочно-непрерывная функция, проверка условий регулярности сводится к проверке условия (3) для всех $u^*(t)$ в точках непрерывности, и для

$u^*(t^-), u^*(t^+)$ в точках разрыва управления. Действительно, $\mathcal{U}^+(t) = \{u^*(t^+)\}$, $\mathcal{U}^-(t) = \{u^*(t^-)\}$, $\mathcal{U}(t) = \{u^*(t)\}$ в точках непрерывности $u^*(t)$, и $\mathcal{U}(t) = \{u^*(t^-), u^*(t^+)\}$ в точках разрыва.

Будем говорить, что функция $\theta: T \to \mathbb{R}^k$ имеет корневой рост слева в точке $t_* \in T$, если существует число $c > 0$ такое, что $|\theta(t) - \theta(t_*)| \leq c\sqrt{|t - t_*|}$ $\forall\, t \in [t_1^*, t_*]$ и корневой рост справа, если это неравенство выполняется для любого $t \in [t_*, t_2^*]$. Рост называется линейным справа/слева, если $\sqrt{|t - t_*|}$ в оценке выше заменить на $|t - t_*|$.

Т е о р е м а 2. Предположим, что допустимый процесс (p^*, x^*, u^*) является экстремальным. Пусть концевые ограничения регулярны в точке p^*, фазовые ограничения согласованы с концевыми в p^*, и процесс (p^*, x^*, u^*) регулярен. Тогда для любых множителей Лагранжа λ, ψ, μ, ν, отвечающих (p^*, x^*, u^*) в силу принципа максимума, выполняется:

i) условие нетривиальности

$$\text{либо} \quad \lambda^0 > 0, \quad \text{либо} \quad \psi(t) - \mu_2(t)\frac{\partial g_2}{\partial x}(t) \notin \operatorname{im} \frac{\partial g_1^*}{\partial x}(t) \ \ \forall\, t \in T; \tag{12}$$

ii) в каждой точке $t_* \in (t_1^*, t_2^*)$ функция $\mu_2(t)$ непрерывна и более того имеет корневой рост справа и слева; если оптимальная траектория выходит негладко на границу j-ого фазового ограничения в точке t_*, $j \in J(t_*)$, тогда рост μ_2^j линеен справа; в случае негладкого схода с границы j-ого фазового ограничения, рост μ_2^j линеен слева;

iii) существует вектор $\lambda_{\mathrm{m}} = (\lambda^0, \lambda^1_{\mathrm{m}}, \lambda^2_{\mathrm{m}})$ и функция $\psi_{\mathrm{m}}(t)$ такие что, набор $\lambda_{\mathrm{m}}, \psi_{\mathrm{m}}, \mu_1, \bar{\mu}_2, \nu$, где

$$\bar{\mu}_2(t) = \begin{cases} \mu_2(t) - \mu_2(t_2^{*-}),\ t \in (t_1^*, t_2^*), \\ \mu_2(t_1^{*+}) - \mu_2(t_2^{*-}),\ t = t_1^*, \\ 0,\ t = t_2^*. \end{cases}$$

удовлетворяет принципу максимума и условию (12); и

iv) при дополнительном предположении, что $d(g_2) = 1$, функция $\bar{\mu}_2(t)$ является гельдеровой с показателем $\alpha = \frac{1}{2}$, т. е.

$$|\bar{\mu}_2(t) - \bar{\mu}_2(s)| \leq \text{const}\,\sqrt{|t - s|} \quad \forall\, t, s \in T. \tag{13}$$

Таким образом, в условиях регулярности, Теорема 2 гарантирует существование непрерывной меры-множителя Лагранжа $\mu_2(t)$, удовлетворяющей условию корневого роста всюду на (t_1^*, t_2^*). Теорема 2 является развитием результатов из [5] на случай, когда также присутствуют фазовые ограничения типа равенств.

Введенное условие регулярности является существенным, что показывает следующий пример из [12].

П р и м е р 1. Пусть $n = m = 2$. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} t_2 - t_1 \to \min, \\ \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2, \\ (u_1, u_2) \in [0,1] \times [0,1], \\ 2x_2 - x_1 \leq 0, \\ t_1 = -1, \\ x(t_1) = (-\frac{1}{2}, -1),\ x(t_2) = (\frac{9}{2}, 2). \end{cases}$$

Опишем экстремальный процесс (он также будет оптимальным). В [12] было показано, что $t_1^* = -1$, $t_2^* = 2\ln 2 + 1$,

- при $t\in[-1,0]$ – выход на границу:

$$(u_1^*(t),u_2^*(t))=(1,1),$$
$$(x_1^*(t),x_2^*(t))=(t+\tfrac{t^2}{2},t);$$

- при $t\in(0,2\ln 2]$ – движение по границе:

$$(u_1^*(t),u_2^*(t))=(1,e^{\frac{t}{2}}/2),$$
$$(x_1^*(t),x_2^*(t))=(2(e^{\frac{t}{2}}-1),e^{\frac{t}{2}}-1);$$

- при $t\in(2\ln 2,t_2^*]$ – сход (сход в $t=2\ln 2$) с границы фазового ограничения:

$$(u_1^*(t),u_2^*(t))=(1,1),$$
$$(x_1^*(t),x_2^*(t))=(2+2(t-2\ln 2)+\tfrac{(t-2\ln 2)^2}{2},1+(t-2\ln 2)).$$

Оказывается, что в точке $t=2\ln 2$, для любых множителей Лагранжа (λ,ψ,μ,ν) , удовлетворяющих ПМ, функция $\mu_2(t)$ терпит разрыв (см. [12]). Это является следствием того, что регулярность оптимального процесса в этой точке не выполняется. Отметим, что аналогичный пример был первоначально предложен в книге [13] (при других концевых ограничениях).

Приведем несколько вспомогательных утверждений.

Л е м м а 1. Пусть допустимый процесс (p^*,x^*,u^*) регулярен. Тогда выполнены условия управляемости в концевых точках фазового ограничения.

Д о к а з а т е л ь с т в о полностью аналогично доказательству Леммы 2.1 из [3].

П р е д л о ж е н и е 4. Существует число $C>0$ такое, что для любых $t_*\in(t_1^*,t_2^*)$, $u_*\in\mathcal{U}(t_*)$, и $\Delta t>0$ справедливы следующие оценки.

Если $u_*\in\mathcal{U}^-(t_*)$, тогда

$$\sum_{j=1}^{d(g_2)}\Gamma_2^j(u_*,t_*)\cdot|\mu_2^j(t_*+\Delta t)-\mu_2^j(t_*^-)|\le C\cdot\Delta t. \tag{14}$$

Если $u_*\in\mathcal{U}^+(t_*)$, тогда

$$\sum_{j=1}^{d(g_2)}\Gamma_2^j(u_*,t_*)\cdot|\mu_2^j(t_*-\Delta t)-\mu_2^j(t_*^+)|\ge -C\cdot\Delta t. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что ограничения типа равенств $g_1(x,t)=0$ отсутствуют. Докажем оценку (14). Выберем $t_*,u_*\in\mathcal{U}^-(t_*)$. Рассмотрим множество E^- , которое соответствует (u_*,t_*) из Предложения 2. Таким образом, $\ell(E^-\cap[t_*-\varepsilon,t_*])>0$ для всех $\varepsilon>0$ и $u^*(t_i)\to u_*$ как только $t_i\in E^-$, $t_i\to t_*^-$.

Для каждого $\varepsilon_i=i^{-1}$ выберем точку $t_i\in E^-\cap[t_*-\varepsilon_i,t_*)$ такую, чтобы в точке t_i , условие оптимальности (7) выполнялось. Далее, так как функция $h(t)$ непрерывна, и $\mu_2(t)$ непрерывна слева в t_* , при $i\to\infty$, имеем:

$$h(t_i)=\bar H(u^*(t_i),t_i)\to\bar H(u_*,t_*)=h(t_*). \tag{16}$$

Существуют числа $\delta,\alpha_0>0$ такие, что для всех $(t,u)\in\mathrm{Gr}\,\mathcal{U}$ найдется единичный вектор $q=q(u,t)$, удовлетворяющий условию регулярности смешанных ограничений (условию (2), где $x=x^*(t)$, такой, что

$$u-\Delta t\cdot\alpha_0 q\in U(t+\Delta t)\quad\ \forall\,\Delta t\in(0,\delta):t+\Delta t\in T.$$

($\mathrm{Gr}\mathcal{U}$ обозначает график $\mathcal{U}$.) Это вытекает из компактности, полунепрерывности сверху многозначного отображения I , регулярности смешанных ограничений и разложения:

$$r^j(u_*-\Delta t\cdot\alpha q,t+\Delta t)=r^j(u,t)-\Delta t\cdot\left\langle\frac{\partial r^j}{\partial u}(u,t),\alpha q\right\rangle+\\+\Delta t\cdot\frac{\partial r^j}{\partial t}(u,t)+V(\Delta t)+o(\Delta t),$$

где $\alpha\in\mathbb{R}$, $V(\Delta t)=r^j(u-\Delta t\cdot\alpha q,t+\Delta t)-r^j(x^*(t),u-\Delta t\cdot\alpha q,t+\Delta t)$. Причем $|V(\Delta t)|\leq$ $\leq\mathrm{const}\cdot\Delta t$ для всех $\Delta t,\alpha:\alpha\Delta t\leq 1$, $q,u\in\mathcal{U}(t),t\in T$, и $\Delta t\in(0,1)$.

Обозначим через $q_*=q(u_*,t_*)$, $H(x,u,\psi,\lambda^0,t)=\langle\psi,\varphi(x,u,t)\rangle-\lambda^0\varphi_0(x,u,t)$. Таким образом, из определения $h(t)$, принимая во внимание (8), и то, что функция $h(t)$ липшицева, используя условие (16), для $\forall\Delta t\in(0,\delta):t_*+\Delta t\in T$, имеем:

$$\bar{H}(u_*-\Delta t\cdot\alpha_0q_*,t_*+\Delta t)\leq h(t_*+\Delta t)=h(t_*)+O(\Delta t)=\bar{H}(u_*,t_*)+O(\Delta t)\ \Rightarrow\\ H(u_*-\Delta t\cdot\alpha_0q_*,t_*+\Delta t)-\big\langle\mu_2(t_*+\Delta t),\Gamma_2(u_*-\Delta t\cdot\alpha_0q_*,t_*+\Delta t)\big\rangle-\\-(H(u_*,t_*)-\big\langle\mu_2(t_*),\Gamma_2(u_*,t_*)\big\rangle)\leq O(\Delta t)\ \Rightarrow\\ \sum_{j=1}^{d(g_2)}\Gamma_2^j(u_*,t_*)\cdot|\mu_2^j(t_*+\Delta t)-\mu_2^j(t_*)|\leq O(\Delta t)=\mathrm{const}\cdot\Delta t.$$

Учитывая, что $\mu_2(t_*)=\mu_2(t_*^-)$, оценка (14) доказана. Доказательство оценки (15) аналогично, только вместо $\mu_2(t_*)$ следует рассмотреть $\mu_2(t_*^+)$, и соответственно, $\bar{H}(u_*,\mu_2(t_*^+),t_*)=h(t_*)$ в (16).

Случай $d(g_1)>0$ (то есть когда присутствуют также и ограничения типа равенств) легко сводится к рассмотренному выше с помощью замены переменной. Действительно, для этой редукции необходимо решить неявную систему $\Gamma_1(x^*(t),u,t)=0$ в окрестности точки (u_*,t_*) относительно части переменных $u_1,u_2,...,u_m$. Тем самым (локально) относительно (u_*,t_*) сведем условия принципа максимума к случаю, когда $d(g_1)=0$.

Предложение доказано. □

Л е м м а 2. Пусть $t_*\in(t_1^*,t_2^*)$, $j\in J(t_*)$. Существует число $c=c(t_*)>0$ такое, что для $\Delta t>0$ справедливы следующие оценки.

Если $x^*(t)$ выходит негладко на границу j -ого фазового ограничения в точке t_* , тогда справедлива оценка линейного роста справа:

$$|\mu_2^j(t_*+\Delta t)-\mu_2^j(t_*^-)|\leq c\cdot\Delta t.$$

Аналогично, в случае негладкого схода с границы j -ого фазового ограничения, справедлива оценка линейного роста слева:

$$|\mu_2^j(t_*-\Delta t)-\mu_2^j(t_*^+)|\leq c\cdot\Delta t.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем оценку линейного роста справа. Если выход на границу j -ого фазового ограничения негладкий, то существует вектор $v\in\mathcal{D}^-(t_*)$: $\big\langle\frac{\partial g_2^j}{\partial x}(t_*),v\big\rangle+\frac{\partial g_2^j}{\partial t}(t_*)>0$. В силу Предложения 3, имеем $v\in\mathrm{conv}\,\varphi(\mathcal{U}^-(t_*),t_*)$. Тогда , по теореме Каратеодори, существуют векторы $u_i\in\mathcal{U}^-(t_*)$ и числа $\alpha_i\geq 0$, $i=1,..,n+1$ такие, что $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=1$ и

$$v=\alpha_1\varphi(u_1,t_*)+\alpha_2\varphi(u_2,t_*)+...+\alpha_{n+1}\varphi(u_{n+1},t_*).$$

Применяя к каждому вектору u_i Предложение 4, получаем оценку

$$\sum_{k=1}^{d(g_2)}\Gamma_2^k(u_i,t_*)\cdot\Delta^+\mu_2^k\leq O(\Delta t)=C\Delta t.$$

Здесь $\Delta^+\mu_2^k = |\mu_2^k(t_* + \Delta t) - \mu_2^k(t_*^-)|$ и константа C не зависит от i и t_*. Умножая последнее неравенство на α_i и суммируя по $i=1,..,n+1$, принимая во внимание определение Γ_2, получаем оценку:

$$\sum_{k=1}^{d(g_2)} \Big(\Big\langle \frac{\partial g_2^k}{\partial x}(t_*), v \Big\rangle + \frac{\partial g_2^k}{\partial t}(t_*) \Big) \cdot \Delta^+\mu_2^k \le O(\Delta t). \tag{17}$$

Однако, $\langle \frac{\partial g_2^k}{\partial x}(t_*), v \rangle + \frac{\partial g_2^k}{\partial t}(t_*) \ge 0 \ \ \forall k \in J(t_*)$. Для всех k, которые не принадлежат множеству $J(t_*)$, имеем $\Delta^+\mu_2^k = 0$ для малых Δt. Таким образом, из (17) следует неравенство

$$\Big(\Big\langle \frac{\partial g_2^j}{\partial x}(t_*), v \Big\rangle + \frac{\partial g_2^j}{\partial t}(t_*) \Big) \cdot \Delta^+\mu_2^j \le O(\Delta t).$$

Отсюда, поскольку $\langle \frac{\partial g_2^j}{\partial x}(t_*), v \rangle + \frac{\partial g_2^j}{\partial t}(t_*) > 0$, следует линейный рост μ_2^j справа. Линейный рост слева выводится аналогично. $\square$

Так как экстремальный процесс регулярен и из соображений компактности, существует такое число $k > 0$, что для всех $(u,t) \in \mathrm{Gr}\,\mathcal{U}$, найдется единичный вектор $d = d(u,t) \in \mathbb{R}^m$ такой, что $d \in \mathrm{Ker}\ \frac{\partial r^j}{\partial u}(u,t)\ \forall j \in I(u,t)$, $d \in \mathrm{Ker}\ \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u}(u,t)$ и

$$\Big\langle \frac{\partial \Gamma_2^j}{\partial u}(u,t), d \Big\rangle > k \ \ \forall j \in J(t). \tag{18}$$

Следующее утверждение является развитием Предложения 4 на второй порядок.

П р е д л о ж е н и е 5. Существуют числа $C, \delta > 0$ такие, что для произвольных $t_* \in (t_1^*, t_2^*)$, $u_* \in \mathcal{U}^-(t_*)$ найдется такой единичный вектор $d_* = d_*(u_*, t_*) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющий условиям регулярности (18) в точке $u = u_*$, $t = t_*$, что

$$d_* \in \mathrm{Ker}\ \frac{\partial r^j}{\partial u}(u_*, t_*) \quad \forall j \in I(u_*, t_*), \tag{19}$$

$$d_* \in \mathrm{Ker}\ \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u}(u_*, t_*), \tag{20}$$

и для $\Delta t \in (0, \delta)$ справедливы следующие оценки.

Если $u_* \in \mathcal{U}^-(t_*)$, то

$$\sum_{j=1}^{d(g_2)} \Delta^+\mu_2^j \cdot \Big(\Gamma_2^j(u_*, t_*) + \sqrt{\Delta t} \cdot \Big\langle \frac{\partial \Gamma_2^j}{\partial u}(u_*, t_*), d \Big\rangle \Big) \le C \cdot \Delta t. \tag{21}$$

Если $u_* \in \mathcal{U}^+(t_*)$, то

$$\sum_{j=1}^{d(g_2)} \Delta^-\mu_2^j \cdot \Big(\Gamma_2^j(u_*, t_*) + \sqrt{\Delta t} \cdot \Big\langle \frac{\partial \Gamma_2^j}{\partial u}(u_*, t_*), d \Big\rangle \Big) \ge -C \cdot \Delta t. \tag{22}$$

Здесь $\Delta^+\mu_2^j = |\mu_2^j(t_* + \Delta t) - \mu_2^j(t_*^-)|$, $\Delta^-\mu_2^j = |\mu_2^j(t_* - \Delta t) - \mu_2^j(t_*^+)|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем по аналогии с доказательством Предложения 4. Предположим, что $d(g_1) = 0$ (общий случай рассматривается точно также, как в Предложении 4). Докажем (21). Пусть $u_* \in \mathcal{U}^-(t_*)$. Рассмотрим множество E^-, соответствующее точке (u_*, t_*) из Предложения 2. Таким образом, $\ell(E^- \cap [t_* - \varepsilon, t_*]) > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0$ и $u^*(t_i) \to u_*$ как только $t_i \in E^-$, $t_i \to t_*^-$. Для любого $\varepsilon_i = i^{-1}$ выберем точку $t_i \in E^- \cap [t_* - \varepsilon_i, t_*)$ так, чтобы условие оптимальности (7) и условие Эйлера–Лагранжа (10) выполнялись в этой точке. Далее, поскольку функция $h(t)$ непрерывна, и $\mu_2(t)$ непрерывна слева в t_* при $i \to \infty$, имеем:

$$\bar{H}(u^*(t_i), t_i) = h(t_i) \to h(t_*) \quad \Rightarrow \quad \Big(\text{так как } \bar{H}(u^*(t_i), t_i) \to \bar{H}(u_*, t_*)\Big) \quad \Rightarrow$$

$$\bar{H}(u_*, t_*) = h(t_*). \tag{23}$$

Покажем, что существуют числа $\delta, \alpha_0 > 0$ такие, что для всех $(u,t) \in \mathrm{Gr}\,\mathcal{U}$ существуют векторы $q = q(u,t)$, $d = d(u,t)$, удовлетворяющие соответственно (2), (18), такие, что

$$u + \sqrt{\Delta t} \cdot d - \Delta t \cdot \alpha_0 q \in U(t + \Delta t) \quad \forall\, \Delta t \in (0, \delta) : t + \Delta t \in T. \tag{24}$$

Действительно, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ очевидно, что

$$r(u + \sqrt{\Delta t} \cdot d - \Delta t \cdot \alpha q, t + \Delta t) \leq r(u + \sqrt{\Delta t} \cdot d - \Delta t \cdot \alpha q, t) + \mathrm{const} \cdot \Delta t,$$

где постоянная $\mathrm{const} > 0$ не зависит от u, t, d, q, α и Δt, если предполагается, что $\alpha \Delta t \leq 1$ и $\Delta t < 1$.

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора до второго порядка:

$$\begin{aligned} &r^j(u + \sqrt{\Delta t} \cdot d - \Delta t \cdot \alpha q, t) = r^j(u,t) + \\ &+ \sqrt{\Delta t} \cdot \Big\langle \tfrac{\partial r^j}{\partial u}(u,t), d \Big\rangle - \Delta t \cdot \Big\langle \tfrac{\partial r^j}{\partial u}(u,t), \alpha q \Big\rangle + O(\Delta t) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Функция $O(\Delta t)$ не зависит от числа α, в отличие от функции $o(\Delta t)$ (в этом и есть смысл записи $O + o$). Следовательно, для некоторых фиксированных u, t, d, q и $j \in I(u,t)$, используя (19) и регулярность смешанных ограничений, в силу которой $\big\langle \frac{\partial r^j}{\partial u}(u_*, t_*), q \big\rangle > 0$, получаем, что существует достаточно большое число $\alpha_0 > 0$ и малое число $\delta > 0$ такие, что

$$r^j(u + \sqrt{\Delta t} \cdot d - \Delta t \cdot \alpha_0 q, t_* + \Delta t) < 0 \quad \forall\, \Delta t \in (0, \delta) : t + \Delta t \in T.$$

Отсюда, используя условие компактности, полунепрерывность сверху многозначного отображения I, и Определение 9, получаем, что числа α_0, δ могут быть выбраны одинаковыми для всех $(u,t) \in \mathrm{Gr}\,\mathcal{U}$, где векторы d, q зависят от u, t. Таким образом, получено (24).

Возьмем $d_* = d(u_*, t_*), q_* = q(u_*, t_*)$. Умножая равенство (10) на вектор d_*, учитывая (19) и (11), для больших i получаем

$$\Big\langle \frac{\partial \bar{H}}{\partial u}(u^*(t_i), t_i), d_* \Big\rangle = \nu(t_i) \frac{\partial r}{\partial u}(u^*(t_i), t_i) d_* \to 0 \qquad \Rightarrow \Big\langle \frac{\partial \bar{H}}{\partial u}(t_*), d* \Big\rangle = 0. \tag{25}$$

Обозначим $\Delta u = \Delta u(\Delta t) = \sqrt{\Delta t} \cdot d_* - \Delta t \cdot \alpha_0 q_*$. Теперь, из определения $h(t)$, используя (24) и тот факт, что в силу (8) функция $h(t)$ липшицева, и, используя (23), для всех $\Delta t \in (0, \delta)$ имеем:

$$\begin{aligned} &\bar{H}(u_* + \Delta u, t_* + \Delta t) - \bar{H}(u_*, t_*) \leq O(\Delta t) \;\Rightarrow \\ &H(u_* + \Delta u, t_* + \Delta t) - H(u_*, t_*) - \\ &\quad - \big\langle \mu_2(t_* + \Delta t), \Gamma_2(u_* + \Delta u, t_* + \Delta t) \big\rangle + \big\langle \mu_2(t_*), \Gamma_2(u_*, t_*) \big\rangle \leq O(\Delta t). \end{aligned}$$

Прибавляя и вычитая из левой стороны неравенства $H(u_* + \Delta u, t_*)$, $\big\langle \mu_2(t_*), \Gamma_2(u_* + \Delta u, t_* + \Delta t) \big\rangle$, и раскладывая в ряд Тейлора, получаем:

$$\begin{aligned} &\Big\langle \tfrac{\partial H}{\partial u}(u_*, t_*), \Delta u \Big\rangle + \big\langle \Delta^+ \mu_2, \Gamma_2(u_* + \Delta u, t_* + \Delta t) \big\rangle - \\ &- \big\langle \mu(t_*), \Gamma_2(u_* + \Delta u, t_* + \Delta t) - \Gamma_2(u_*, t_*) \big\rangle \leq O(\Delta t) + O(|\Delta u|^2). \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь, $\Delta^{+}\mu_2 = (\Delta^{+}\mu_2^1, \Delta^{+}\mu_2^2, ..., \Delta^{+}\mu_2^{d(g_2)})$. Очевидно, что $\Delta^{+}\mu_2 \geq 0$.

Опять же путем преобразований и разложения получаем:

$$\begin{aligned}\Gamma_2(u_* + \Delta u, t_* + \Delta t) &= \Gamma_2(u_* + \Delta u, t_* + \Delta t) - \Gamma_2(u_* + \Delta u, t_*) + \\ &+ \Gamma_2(u_* + \Delta u, t_*) - \Gamma_2(u_*, t_*) + \Gamma_2(u_*, t_*) = \\ &= O(\Delta t) + \Gamma_2(u_* + \Delta u, t_*) - \Gamma_2(u_*, t_*) + \Gamma_2(u_*, t_*) = \\ &= \Gamma_2(u_*, t_*) + \tfrac{\partial \Gamma_2}{\partial u}(u_*, t_*)\Delta u + O(\Delta t) + O(|\Delta u|^2).\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (26), получаем оценку

$$\begin{aligned}&\Big\langle \frac{\partial H}{\partial u}(u_*, t_*) - \mu_2(t_*)\frac{\partial \Gamma_2}{\partial u}(u_*, t_*), \Delta u \Big\rangle + \Big\langle \Delta^{+}\mu_2, \Gamma_2(u_*, t_*) + \frac{\partial \Gamma_2}{\partial u}(u_*, t_*)\Delta u \Big\rangle = \\ &= \Big\langle \frac{\partial \bar{H}}{\partial u}(u_*, t_*), \Delta u \Big\rangle + \Big\langle \Delta^{+}\mu_2, \Gamma_2(u_*, t_*) + \frac{\partial \Gamma_2}{\partial u}(u_*, t_*)\Delta u \Big\rangle \leq O(\Delta t) + O(|\Delta u|^2).\end{aligned}$$

Из (25) получаем

$$\Big\langle \Delta^{+}\mu_2, \Gamma_2(u_*, t_*) + \frac{\partial \Gamma_2}{\partial u}(u_*, t_*)\Delta u \Big\rangle \leq O(\Delta t) + O(|\Delta u|^2) = O(\Delta t).$$

Отсюда и из определения Δu получаем оценку (21) и существование требуемой константы $C > 0$. Очевидно, что константа C может быть выбрана независимо от t_* u_*, так как все функции O были получены в результате разложения функций H, Γ_2, ν в ряд Тейлора в непосредственной близости от экстремальных значений, и, следовательно, из-за свойств этих функций, приведенные выше рассуждения и оценки являются равномерными по t. Оценка (22) доказывается аналогично. □

Обозначим через $\varepsilon(t_*)$ наибольшее положительное число $\varepsilon > 0$ такое, что $J(t) \subseteq J(t_*)$ $\forall\, t \in (t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon)$, значение $+\infty$ включая. (Будем считать, что $x^*(t) = x_2^*$ $\forall\, t > t_2^*$ и $x^*(t) = x_1^*$ $\forall\, t < t_1^*$). Многозначное отображение $J(t)$ полунепрерывно сверху, поэтому число $\varepsilon > 0$ существует (оно зависит от t_*).

Л е м м а 3. Существуют числа $C, \delta > 0$ такие, что для произвольных $t_* \in (t_1^*, t_2^*)$ и $\Delta t \in (0, \min\{\delta, \varepsilon(t_*)\})$ выполняются следующие оценки.

Оценка корневого роста справа:

$$|\mu_2(t_* + \Delta t) - \mu_2(t_*^-)| \leq C \cdot \sqrt{\Delta t}.$$

Оценка корневого роста слева:

$$|\mu_2(t_* - \Delta t) - \mu_2(t_*^+)| \leq C \cdot \sqrt{\Delta t}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем оценку корневого роста справа. Выберем t_* и произвольный вектор $v \in \mathcal{D}^-(t_*)$. Из Предложения 3 $v \in \operatorname{conv} \varphi(\mathcal{U}^-(t_*), t_*)$. По теореме Каратеодори существуют такие векторы $u_i \in \mathcal{U}^-(t_*)$ и числа $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, .., n+1$ такие, что $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$ и

$$v = \alpha_1 \varphi(u_1, t_*) + \alpha_2 \varphi(u_2, t_*) + ... + \alpha_{n+1} \varphi(u_{n+1}, t_*).$$

Применяя Предложение 5 к каждой паре t_*, u_i, получаем, что существует единичный вектор d_i, удовлетворяющий (18), такой, что

$$\sum_{j=1}^{d(g_2)} \Delta^{+}\mu_2^j \cdot \Big(\Gamma_2^j(u_i, t_*) + \sqrt{\Delta t} \cdot \Big\langle \frac{\partial \Gamma_2^j}{\partial u}(u_i, t_*), d_i \Big\rangle\Big) \leq c \cdot \Delta t.$$

Это неравенство справедливо для $\Delta t \in (0,\delta)$. Числа c,δ не зависят от i,t_*. Умножим это неравенство на α_i и затем просуммируем по $i=1,..,n+1$. Принимая во внимание определение Γ_2, получаем:

$$\sum_{j=1}^{d(g_2)} \Delta^+\mu_2^j \cdot \Big(\Big\langle \frac{\partial g_2^j}{\partial x}(t_*), v\Big\rangle + \frac{\partial g_2^j}{\partial t}(t_*) + \sqrt{\Delta t}\cdot \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \Big\langle \frac{\partial \Gamma_2^j}{\partial u}(u_i,t_*), d_i\Big\rangle\Big) \le c\cdot \Delta t.$$

Однако, $\Big\langle \frac{\partial g_2^j}{\partial x}(t_*), v\Big\rangle + \frac{\partial g_2^j}{\partial t}(t_*) \ge 0 \quad \forall\, j \in J(t_*)$. Для тех j, которые не принадлежат множеству $J(t_*)$,имеем $\Delta^+\mu_2^j = 0 \quad \forall\ \Delta t \in (0,\varepsilon(t_*))$. Следовательно, применяя (18) при $\Delta t \in (0,\min\{\delta,\varepsilon(t_*)\})$, получаем оценку

$$\kappa\sqrt{\Delta t}\cdot \sum_{j=1}^{d(g_2)} \Delta^+\mu_2^j \le c\cdot\Delta t,$$

из которой следует оценка корневого роста справа при $C=k^{-1}c$.

Оценка корневого роста слева μ_2 доказывается аналогично. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о Теоремы 2. Утверждение i) есть следствие Леммы 1, Теоремы 5 из [4], а также стандартных рассуждений полностью аналогичных рассуждениям, проведенным при доказательстве Теоремы 4.2 в [3]. Действительно, условия регулярности из Определения 9 более сильные, чем соответствующие условия регулярности из [4]. (Детали доказательства опускаются.)

Утверждение ii) уже получено в Леммах 2 и 3.

Докажем iii). Пусть набор $\lambda,\psi,\mu_1,\mu_2,\nu$ удовлетворяет принципу максимума. Покажем, что существует вектор $\lambda_{\rm m}$ и функция $\psi_{\rm m}$ такие, что набор $\lambda_{\rm m},\psi_{\rm m},\mu_1,\bar\mu_2,\nu$, где функция $\bar\mu_2(t)$ вводится выше в формулировке теоремы (это непрерывное продолжение μ_2 из (t_1^*,t_2^*) на весь интервал T минус скачок μ_2 в правом конце $\mu_2(t_2^{*-})$), тоже удовлетворяет принципу максимума.

Рассмотрим набор множителей

$$\lambda,\ \ \psi_{\rm m}(t) = \psi(t) - \mu_2(t_2^{*-})\frac{\partial g_2}{\partial x}(t),\ \ \mu_1(t),\ \ \mu_{\rm m}(t) = \mu_2(t) - \mu_2(t_2^{*-}),\ \ \nu(t).$$

Заметим, что он отвечает всем условиям принципа максимума за исключением б).

Благодаря условию согласованности фазовых и концевых ограничений для каждого индекса j в задаче условного экстремума

$$\begin{cases} \Delta_1^j\cdot g_2^j(x_1,t_1) + \Delta_2^j\cdot g_2^j(x_2,t_2) \to \max,\\ e_1(p)=0,\ e_2(p)\le 0,\end{cases}$$

где $\Delta_1^j = \mu_{\rm m}^j(t_1^*) - \mu_{\rm m}^j(t_1^{*+})$, $\Delta_2^j = -\mu_{\rm m}^j(t_2^*)$, точка $p=p^*$ есть точка локального минимума. Применяя классическое правило множителей Лагранжа, учитывая регулярность концевых ограничений, получаем следующее соотношение:

$$\Delta_1^j\cdot\frac{\partial g_2^j(x_1^*,t_1^*)}{\partial(x,t)} = \lambda^{1j}\frac{\partial e_1(p^*)}{\partial(x_1,t_1)} + \lambda^{2j}\frac{\partial e_2(p^*)}{\partial(x_1,t_1)},$$
$$\Delta_2^j\cdot\frac{\partial g_2^j(x_2^*,t_2^*)}{\partial(x,t)} = \lambda^{1j}\frac{\partial e_1(p^*)}{\partial(x_2,t_2)} + \lambda^{2j}\frac{\partial e_2(p^*)}{\partial(x_2,t_2)},$$

где $\lambda^{1j},\lambda^{2j}$ такие векторы, что $\lambda^{2j}\geq 0$, $\langle\lambda^{2j},e_2(p^*)\rangle=0$ для всех j. Теперь с учетом этого и условий трансверсальности (6), (9) легко получить, что при $\lambda_{\rm m}=(\lambda^0,\lambda^1_{\rm m},\lambda^2_{\rm m})$, где

$$\lambda^i_{\rm m}=\lambda^i+\sum_{j=1}^{d(g_2)}\lambda^{ij},\quad i=1,2,$$

набор $\lambda_{\rm m},\psi_{\rm m},\mu_1,\bar\mu_2,\nu$, который, очевидно, в силу (12) нетривиален, удовлетворяет принципу максимума. Более того, этот набор снова удовлетворяет (12) (см. рассуждения выше).

Докажем iv). Возьмем $t_*\in(t^*_1,t^*_2)$. Если $J(t_*)=\varnothing$, то $\bar\mu_2(t)$ постоянна вблизи t_*. Если $J(t_*)\neq\varnothing$, тогда из Леммы 3 следует существование C,δ, независящих от t_*, таких, что для функции $\bar\mu_2(t)$ справедливы оценки корневого роста справа и слева (считаем, что $\varepsilon(t_*)=+\infty$, $d(g_2)=1$). Тогда очевидно, что функция $\bar\mu_2(t)$ удовлетворяет этим оценкам (с теми же самыми C,δ в каждой точке $t_*\in T$). Следовательно, для любой точки $s\in T$ имеем

$$|\bar\mu_2(t)-\bar\mu_2(s)|\leq C\sqrt{|t-s|}\;\;\forall\, t\in(s-\delta,s+\delta).$$

Интервалы $(s-\delta,s+\delta)$ образуют покрытие T. Таким образом, после выбора конечного подпокрытия для $a<b$ и $t\in[a,b]$ (где a и b принадлежат двум соседним замкнутым полуинтервалам вида $[s-\delta,s]$ или $[s,s+\delta]$, а t берется из их пересечения) справедливо следующее неравенство

$$\begin{aligned}&|\bar\mu_2(a)-\bar\mu_2(b)|=|\bar\mu_2(a)-\bar\mu_2(t)+\bar\mu_2(t)-\bar\mu_2(b)|\leq|\bar\mu_2(a)-\bar\mu_2(t)|+|\bar\mu_2(t)-\bar\mu_2(b)|\leq\\ &\leq C\sqrt{|a-t|}+C\sqrt{|t-b|}\leq\sqrt{2}C\sqrt{|a-t|+|t-b|}\leq\sqrt{2}C\sqrt{|a-b|}.\end{aligned}$$

Таким образом, благодаря тому, что δ не зависит от s, получаем (13). Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гамкрелидзе Р.В.* Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах // Изв. АН СССР. Сер. матем, 1960. Т. 24. № 3. С. 315–356.

2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.

3. *Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Pereira F.L.* The Maximum Principle for Optimal Control Problems with State Constraints by R.V. Gamkrelidze: Revisited // J. Optim. Theory Appl, 2011. V. 149. P. 474–493.

4. *Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu.* Non-degenerate necessary optimality conditions for the optimal control problem with equality-type state constraints // J. Glob Optim, 2015. P. 1–25.

5. *Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu.* On some continuity properties of the measure Lagrange multiplier from the maximum principle for state constrained problems // SIAM J. Control Optim. V. 53. № 4. P. 2514–2540.

6. *Bryson E.R., Yu-Chi Ho* Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control. Blaisdell Publishing Company, 1969.

7. *Buskens C., Maurer H.* SQP-methods for solving optimal control problems with control and state constraints: adjoint variables, sensitivity analysis and real-time control // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000. V. 120. P. 85–108.

8. *Alexandrov V.V. and Budninskiy M.A.* On Kinematic Control Extremals // European Control Conference (ECC), Zurich, Switzerland, 2013. P. 210–214.

9. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Необходимые условия слабого экстремума в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями типа неравенства // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1968. Т. 8. № 4. С. 725–779.

10. *Natanson I.P.* Theory of Functions of a Real Variable // Ungar. New-York, 1955.

11. *Арутюнов А.В., Карамзин Д.Ю., Перейра Ф.Л.* Условия отсутствия скачка решения сопряженной системы принципа максимума в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями // Тр. ИММ УрО РАН, 2014. Т. 20. № 4. С. 29–37.

12. *Захаров Е.В., Карамзин Д.Ю.* К исследованию условий непрерывности меры-множителя Лагранжа в задачах с фазовыми ограничениями // Дифференциальные уравнения, 2015. Т. 51. № 3. С. 395–401.

13. *Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.А.* Необходимое условие в оптимальном управлении. М.: Наука, 1990. 320 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00283, 16-31-60005), гранта Президента РФ № МД-4639.2016.1.

Поступила в редакцию 9 февраля 2016 г.

Горбачева Анна Викторовна, Российский государственный социальный университет, г. Москва, Российская Федерация, преподаватель кафедры прикладной математики, e-mail: avgorbacheva@inbox.ru

Карамзин Дмитрий Юрьевич, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: dmitry_karamzin@mail.ru

UDC 517.977.52
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-40-55

CLARIFICATION OF THE OPTIMALITY CONDITIONS IN CONTROL PROBLEMS WITH STATE CONSTRAINTS OF EQUALITY AND INEQUALITY TYPES

© A. V. Gorbacheva, D. Yu. Karamzin

The continuity of the measure Lagrange multiplier from the maximum principle for control problems with state constraints is investigated. It is proved, under certain regularity assumptions, that the distribution function of the measure is Hölder continuous with exponent 1/2.

Key words: optimal control; maximum principle; state constraints.

ACKNOWLEDGEMENTS: The present work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 16-01-00283, 16-31-60005), and by the grant of the President of the Russian Federation № МД-4639.2016.1.

REFERENCES

1. *Gamkrelidze R.V.* Optimal'nye processy upravleniya pri ogranichennyh fazovyh koordinatah // Izv. AN SSSR. Ser. matem, 1960. T. 24. № 3. S. 315–356.
2. *Pontryagin L.S., Boltyanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* Matematicheskaya teoriya optimal'nyh processov. M.: Nauka, 1983. 393 s.
3. *Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Pereira F.L.* The Maximum Principle for Optimal Control Problems with State Constraints by R.V. Gamkrelidze: Revisited // J. Optim. Theory Appl, 2011. V. 149. P. 474–493.
4. *Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu.* Non-degenerate necessary optimality conditions for the optimal control problem with equality-type state constraints // J. Glob Optim, 2015. P. 1–25.
5. *Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu.* On some continuity properties of the measure Lagrange multiplier from the maximum principle for state constrained problems // SIAM J. Control Optim. V. 53. № 4. P. 2514–2540.

6. *Bryson E.R., Yu-Chi Ho* Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control. Blaisdell Publishing Company, 1969.

7. *Buskens C., Maurer H.* SQP-methods for solving optimal control problems with control and state constraints: adjoint variables, sensitivity analysis and real-time control // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000. V. 120. P. 85–108.

8. *Alexandrov V.V. and Budninskiy M.A.* On Kinematic Control Extremals // European Control Conference (ECC), Zurich, Switzerland, 2013. P. 210–214.

9. *Dubovickij A.YA., Milyutin A.A.* Neobhodimye usloviya slabogo ehkstremuma v zadachah optimal'nogo upravleniya so smeshannymi ogranicheniyami tipa neravenstva // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, 1968. T. 8. № 4. S. 725–779.

10. *Natanson I.P.* Theory of Functions of a Real Variable // Ungar. New-York, 1955.

11. *Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Perejra F.L.* Usloviya otsutstviya skachka resheniya sopryazhennoj sistemy principa maksimuma v zadachah optimal'nogo upravleniya s fazovymi ogranicheniyami // Tr. IMM UrO RAN, 2014. T. 20. № 4. S. 29–37.

12. *Zaharov E.V., Karamzin D.YU.* K issledovaniyu uslovij nepreryvnosti mery-mnozhitelya Lagranzha v zadachah s fazovymi ogranicheniyami // Differencial'nye uravneniya, 2015. T. 51. № 3. S. 395–401.

13. *Afanas'ev A.P., Dikusar V.V., Milyutin A.A., Chukanov S.A.* Neobhodimoe uslovie v optimal'nom upravlenii. M.: Nauka, 1990. 320 s.

Received 9 February 2016.

Gorbacheva Anna Viktorovna, Russian State Social University, Moscow, Russian Federation, Lecturer of the Applied Mathematics Department, e-mail: avgorbacheva@inbox.ru

Karamzin Dmitry Yurjevich, Dorodnicyn Computing Center of the Federal Research Center “Informatics and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher, e-mail: dmitry_karamzin@mail.ru

УДК 517.911.5
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-55-65

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИИ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВКЛЮЧЕНИЙ С КАУЗАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

© **С. В. Корнев, В. В. Обуховский**

В настоящей работе предлагаются новые методы решения периодической задачи для нелинейного объекта, описываемого дифференциальным включением с каузальным оператором. В первой части работы предполагается, что правая часть включения имеет выпуклые замкнутые значения. Далее мы предполагаем, что правая часть невыпуклозначна и полунепрерывна снизу. В обоих случаях для исследования рассматриваемой задачи применяется интегральная направляющая функция.

Ключевые слова: включение; каузальный оператор; интегральная направляющая функция; периодические решения; топологическая степень.