УДК 517.925
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1938-1943

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ С КВАЗИНОРМАЛЬНОЙ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ МАТРИЦЕЙ

© **В. И. Безяев**

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: vbezyaev@mail.ru

Для неавтономных квазилинейных систем ОДУ с нелинейной квазинормальной определяющей матрицей, имеющей разрывные элементы, исследуются эффективные условия устойчивости. Результаты получены без использования функций Ляпунова. Приводятся примеры.
Ключевые слова: системы с разрывной правой частью; устойчивость и неустойчивость решений; нормальная и квазинормальная матрица

1. Введение

Дифференциальные уравнения и системы с разрывной правой частью стали активно изучаться в связи с важными приложениями в технике [1]. Вопросы устойчивости решений нелинейных ОДУ и их систем, в том числе и с разрывной правой частью, исследовались, например, в [1-7]. В данной работе для нелинейных систем с квазинормальной определяющей матрицей (в общем случае разрывной) развивается метод (см., например, [8-10]), дающий конструктивные условия устойчивости и неустойчивости решений систем с нормальной определяющей матрицей. Отметим, что применение функций Ляпунова для рассматриваемых в данной работе систем в общем случае весьма проблематично. Приведены примеры.

Как известно, кусочно непрерывной (может быть матричной) функцией $f(x,t)$ в ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$ называется функция $f(x,t)$, непрерывная вплоть до границы каждой из подобластей $\Omega_i\,(i=\overline{1,k})$, где

$$\Omega = \left(\bigcup_{i=1}^{k}\Omega_i\right)\bigcup M, \quad \Omega_i\bigcap\Omega_j=\varnothing \quad \text{при } i\neq j, \quad M\subset\bigcup_{i=1}^{k}\partial\Omega_i, \quad mesM=0$$

(здесь mes – мера Лебега). Если область Ω неограничена, то в определении кусочно непрерывной функции каждая ограниченная часть области Ω может иметь общие точки лишь с конечным семейством областей Ω_i (см., например, [5]). Наиболее часто встречается случай, когда множество М точек разрыва функции $f(x,t)$ состоит из конечного семейства гиперповерхностей.

Система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{1}$$

с кусочно непрерывной вектор-функцией $f(x,t)$ в области Ω доопределяется по А.Ф. Филиппову [5, § 4, п. 2а] до дифференциального включения

$$\dot{x}\in F(x,t), \tag{2}$$

где многозначная функция $F(x,t)$ определена при почти всех t $(t \notin T_0,\ mesT_0 = 0)$ и всех x, для которых $(x,t) \in \Omega$. При этом $F(x,t)$ – наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные значения вектор-функции $f(\tilde{x},t)$, когда $(\tilde{x},t) \notin M$, $\tilde{x} \to x$, $t = const$, а многозначная функция $F(x,t)$ – β-непрерывна (полунепрерывна сверху относительно включения) по x,t в области Ω. Указанные свойства функции $F(x,t)$ обеспечивают существование решения включения (2) в некоторой окрестности любой точки $(x^0,t_0) \in \Omega$ и возможность его продолжения до выхода на границу любой замкнутой ограниченной области $D \subset \Omega$. Решением системы (1) называется решение дифференциального включения (2).

2. Основные утверждения

Т е о р е м а 1. *Пусть в неавтономной нелинейной системе*

$$\dot{x} = A(x,t)x \tag{3}$$

$A(x,t)$ *является кусочно непрерывной матричной функцией в области* $\Omega = \{|x| < \delta,\ t > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$ *и нормальной матрицей при всех* $(x,t) \in \Omega \backslash M$ $(M$ *— множество точек разрыва функции* $A(x,t))$, *а* $\{\lambda_j(x,t)\}_1^n$ *— ее спектр. Тогда решение* $x(t) \equiv 0$ *системы* (3) *является:*
1) устойчивым при $Re\lambda_j(x,t) \le 0$ *для* $j = \overline{1,n}$, $(x,t) \in \Omega \backslash M$;
2) асимптотически устойчивым при $Re\lambda_j(x,t) \le -\beta(x)$ *для* $j = \overline{1,n}$, $(x,t) \in \Omega \backslash M$ *или*
3) неустойчивым при $Re\lambda_j(x,t) \ge \beta(x)$ *для* $j = \overline{1,n}$, $(x,t) \in \Omega \backslash M$,
если $\beta(x)$ *— непрерывная при* $|x| < \delta$ *и положительная при* $0 < |x| < \delta$ *функция.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема 1 является частным случаем теоремы 3 в [10] при $v(x) = (1/2)|x|^2$. □

В некоторых случаях нелинейные системы вида (3), у которых матрица $A(x,t)$ не является нормальной, удается свести с помощью замены переменной x к системе того же вида, но с нормальной определяющей матрицей. В этом случае матрицу $A(x,t)$ будем называть квазинормальной.

Т е о р е м а 2. *Пусть для системы вида* (3) *с кусочно непрерывной в области* $\Omega = \{|x| < \delta,\ t > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$ *матрицей* $A(x,t)$ *существует такая диагональная матрица* $q(x) = diag(q_1(x_1),\ldots,q_n(x_n))$, *где* $q_j(x_j)$ *кусочно непрерывные и положительные при* $|x_j| < \delta$ *функции* $(j = \overline{1,n})$, *а* $B(x,t) \equiv q(x)A(x,t)$ *нормальная при всех* $(x,t) \in \Omega \backslash M$ *матрица со спектром* $\{\mu_j(x,t)\}_1^n$ $(M$ *— множество точек разрыва кусочно непрерывной в* Ω *матричной функции* $B(x,t))$. *Тогда решение* $x(t) \equiv 0$ *системы* (3) *является:*
1) устойчивым при $Re\mu_j(x,t) \le 0$ *для* $j = \overline{1,n}$, $(x,t) \in \Omega \backslash M$;
2) асимптотически устойчивым при $Re\mu_j(x,t) \le -\beta(x)$ *для* $j = \overline{1,n}$, $(x,t) \in \Omega \backslash M$ *или*
3) неустойчивым при $Re\mu_j(x,t) \ge \beta(x)$ *для* $j = \overline{1,n}$, $(x,t) \in \Omega \backslash M$,
если $\beta(x)$ *— непрерывная при* $|x| < \delta$ *и положительная при* $0 < |x| < \delta$ *функция.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во включении (2), соответствующем системе (3), сделаем замену переменных вида $y = Q(x)$, где $Q(x) = (Q_1(x_1),\ldots,Q_n(x_n))$,

$$Q_j(x_j) = \int_0^{x_j} q_j(s)ds \quad (0 < |x_j| < \delta,\ j = \overline{1,n}).$$

В силу свойств функций $q_j(x_j)$ функции $Q_j(x_j)$ являются непрерывными и возрастающими, имеющими кусочно непрерывные производные при $0 < |x_j| < \delta,\ j = \overline{1,n}$, причем $Q(0) = 0$. Следовательно, преобразование $y = Q(x)$ взаимно однозначно отображает шар $|x| < \delta_1 \le \delta$ в шар $|y| < \gamma$, где $\gamma > 0$ и определитель Якоби $\det Q'(x) \ne 0$ при $|x| < \delta$ (кроме точек разрыва). Отсюда и из теоремы о замене переменных в дифференциальных включениях (см. в [5, § 9] теорему 1 и замечания к ней) получаем, что включение (2), соответствующее системе (3), эквивалентно включению вида

$$\dot{x} \in G(x,t), \tag{4}$$

соответствующего системе

$$\dot{y} = B(Q^{-1}(y), t)Q^{-1}(y). \tag{5}$$

Под эквивалентностью данных включений (2) и (4) понимается то, что для любого решения $x(t)$ включения (2), соответствующего системе (3), функция $y(t) = Q(x(t))$ является решением включения (4), соответствующего системе (5), а для любого решения $y(t)$ включения (4) функция $x(t) = Q^{-1}(y(t))$ является решением включения (2), соответствующего системе (3). Положим

$$v(y) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{y_j} P_j(s)ds,$$

где $P_j(s) = Q_j^{-1}(s)$, $j = \overline{1,n}$. Тогда при $|y| < \gamma$ функция $v(y)$ является непрерывной и положительно определенной, имеющей кусочно непрерывный градиент $\operatorname{grad} v(y)$, а функция

$$|\operatorname{grad} v(y)|^2 = \sum_{j=1}^{n} P_j^2(y_j)$$

также непрерывна и положительно определена. Таким образом, система (5) имеет вид $\dot{y} = B(Q^{-1}(y), t) \operatorname{grad} v$ и для нее применима теорема 3 из [10]. Поскольку $Q(0) = 0$ и данные включения (2) и (4) эквивалентны, то отсюда сразу следуют все утверждения теоремы. □

3. Примеры

Приведем несколько простых примеров применения теоремы 2 для исследования устойчивости нелинейных систем с квазинормальными определяющими матрицами.

П р и м е р 1. В ([11, гл. 5, § 5]) приведена теорема об устойчивости положения равновесия консервативной механической системы с одной степенью свободы, описываемой нелинейным дифференциальным уравнение второго порядка

$$\ddot{y} = f(y), \tag{6}$$

где $f \in C^2(|y| < \delta)$, $f(0) = 0$. Показано, что если потенциальная энергия механической системы $U(y) = -\int_0^y f(\eta)d\eta$ имеет в точке $x = 0$ строгий минимум (то есть $f'(0) < 0$) , то положение равновесия устойчиво.

С помощью теоремы 2 это утверждение легко обобщить. Будем предполагать, что функция $f \in C(|y| < \delta)$, $f(0) = 0$, а $f(y)/y$ кусочно непрерывна и отрицательна при $|y| < \delta$. Простейшим примером такой функции, не удовлетворяющей условиям из [11] в начале примера, является $f(y) = -y(sgn(y) + 2)$. Сведем уравнение (6) к нелинейной системе

$$\dot{x} = A(x)x, \tag{7}$$

где

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g(x_1) & 0 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2)^\top = (y, \dot{y})^\top, \quad g(y) = f(y)/y.$$

С помощью диагональной матрицы

$$Q(x) = \begin{pmatrix} -g(x_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

с кусочно непрерывными и положительными при $|x_1|<\delta$ диагональными элементами получаем нормальную матрицу

$$B(x)=Q(x)A(x)=\begin{pmatrix}0 & -g(x_1)\\ g(x_1) & 0\end{pmatrix}$$

с чисто мнимым спектром. Применяя теорему 2, получаем устойчивость тривиального решения системы (7).

П р и м е р 2. Поведение некоторых консервативных систем моделируется уравнением Дуффинга $\ddot{y}+ay+by^3=0$, где a и b —вещественные параметры (см., например, [12]). С помощью теоремы 2 при $a>0$, $b\neq 0$ докажем устойчивость тривиального решения системы, эквивалентной уравнению Дуффинга (отметим при этом, что данный пример является частным случаем примера 1). Записывая уравнение Дуффинга в векторной форме

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -c(x_1) & 0\end{pmatrix}x\equiv A(x)x \qquad (\, x=(x_1,x_2)=(y,\dot{y})^\top,\ c(x_1)=a+bx_1^2) \tag{8}$$

и используя диагональную матрицу $Q(x)=\begin{pmatrix}c(x_1) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, получаем нормальную матрицу

$$B(x)\equiv Q(x)A(x)=\begin{pmatrix}0 & c(x_1)\\ -c(x_1) & 0\end{pmatrix}$$

с чисто мнимым спектром. Отсюда и из теоремы 2 (при $|x_1|<\sqrt{a/|b|}$) сразу получаем устойчивость тривиального решения системы (8).

П р и м е р 3. Простейшая модель механизма генетического контроля у бактерий описывается нелинейной системой (см., например, [4], с. 55)

$$\begin{cases}\dot{u} &= p/v-a\\ \dot{v} &= ru-b\end{cases} \qquad (\, a,b,p,r>0\,)$$

с точкой покоя $u_0=b/r$, $v_0=p/a$. После замены $x_1=u-u_0$, $x_2=v-v_0$ получим систему

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & -c(x_2)\\ r & 0\end{pmatrix}x\equiv A(x)x, \tag{9}$$

где $x=(x_1,x_2)^\top$, $c(x_2)=a^2/(ax_2+p)>0$ при $|x|<\delta$. Для применения теоремы 2 легко подобрать диагональную матрицу вида

$$Q(x)=\begin{pmatrix}r & 0\\ 0 & c(x_2)\end{pmatrix},$$

при которой матрица

$$B(x)\equiv Q(x)A(x)=\begin{pmatrix}0 & -rc(x_2)\\ rc(x_2) & 0\end{pmatrix}$$

является кососимметрической и, значит, имеет чисто мнимый спектр. Следовательно тривиальное решение системы (9) и точка покоя (u_0,v_0) исходной системы устойчивы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
2. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. СПб.: Лань, 2008.

4. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
5. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
6. *Hajek O.* Discontinuous differential equations I, II // Journal of Differential Equations. 1979. V. 32. Iss. 2. P. 149–170; P. 171–185.
7. *Hermes H.* The generalised differential equation $x \in R(t,x)$ // Advances Math. 1970. V. 4. Iss. 2. P. 149–169.
8. *Коняев Ю.А.* Метод унитарных преобразований в теории устойчивости // Известия вузов. Математика. 2002. № 2. С. 41–45.
9. *Безяев В.И., Коняев Ю.А.* Анализ устойчивости решений одного класса квазилинейных неавтономных разрывных систем // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. Москва, 2010. № 4. С. 5–10.
10. *Безяев В.И.* Об устойчивости решений одного класса разрывных систем // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 6. С. 1730–1735.
11.*Карташев А.П., Рождественский Б.П.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1986.
12. *Kovacic I., Brennan M.J.* The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour. John Wiley and Sons, 2011.

Поступила в редакцию 5 октября 2016 г.

Безяев Владимир Иванович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, e-mail: vbezyaev@mail.ru

UDC 517.925
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1938-1943

ON STABILITY OF SOLUTIONS OF DISCONTINUOUS SYSTEMS WITH QUASI-NORMAL A DEFINING MATRIX

© **V. I. Bezyaev**

Peoples Friendship University of Russia
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: vbezyaev@mail.ru

We give effective conditions of stability and instability of solutions of quasi-linear non-autonomous ODE systems with non-linear quasi-normal a defining matrix having discontinuous elements. The results obtained do not use the Lyapunov functions. We consider some examples.
Key words: systems with discontinuous right-hand side; the stability and instability of solutions; normal and quasi-normal matrix

REFERENCES

1. *Andronov A.A., Vitt A.A., Hajkin S.Eh.* Teoriya kolebanij. M.: Nauka, 1981.
2. *Gelig A.H., Leonov G.A., YAkubovich V.A.* Ustojchivost' nelinejnyh sistem s needinstvennym sostoyaniem ravnovesiya. M.: Nauka, 1978.
3. *Demidovich B.P.* Lekcii po matematicheskoj teorii ustojchivosti. SPb.: Lan', 2008.
4. *Rush N., Abets P., Lalua M.* Pryamoj metod Lyapunova v teorii ustojchivosti. M.: Mir, 1980.
5. *Filippov A.F.* Differencial'nye uravneniya s razryvnoj pravoj chast'yu. M.: Nauka, 1985.

6. *Hajek O.* Discontinuous differential equations I, II // Journal of Differential Equations. 1979. V. 32. Iss. 2. P. 149–170; P. 171–185.

7. *Hermes H.* The generalised differential equation $x \in R(t,x)$ // Advances Math. 1970. V. 4. Iss. 2. P. 149–169.

8. *Konyaev YU.A.* Metod unitarnyh preobrazovanij v teorii ustojchivosti // Izvestiya vuzov. Matematika. 2002. № 2. S. 41–45.

9. *Bezyaev V.I., Konyaev YU.A.* Analiz ustojchivosti reshenij odnogo klassa kvazilinejnyh neavtonomnyh razryvnyh sistem // Vestnik RUDN. Seriya: Matematika. Informatika. Fizika. Moskva, 2010. № 4. S. 5–10.

10. *Bezyaev V.I.* Ob ustojchivosti reshenij odnogo klassa razryvnyh sistem // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences, 2015. T. 20. Vyp. 6. S. 1730–1735.

11.*Kartashev A.P., Rozhdestveskij B.P.* Obyknovennye differencial'nye uravneniya i osnovy variacionnogo ischisleniya. M.: Nauka, 1986.

12. *Kovacic I., Brennan M.J.* The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour. John Wiley and Sons, 2011.

Received 5 October 2016

Bezyaev Vladimir Ivanovich, Peoples Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics Department, e-mail: vbezyaev@mail.ru

Информация для цитирования:

Безяев В.И. Об устойчивости решений разрывных систем с квазинормальной определяющей матрицей // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 1938-1943.
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1938-1943

Bezyaev V.I. Ob ustojchivosti reshenij razryvnyh sistem s kvazinormal'noj opredelyayushchej matricej [On stability of solutions of discontinuous systems with quasi-normal a defining matrix]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 1938-1943.
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1938-1943 (In Russian)