УДК 517.98
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2047-2053

СПЛЕТАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

© **В. Ф. Молчанов**

Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: v.molchanov@bk.ru

Мы описываем сплетающие операторы для тензорного произведения бесконечномерного и конечномерного представлений группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.
Ключевые слова: группы и алгебры Ли; представления групп Ли; тензорные произведения; сплетающие операторы

Мы продолжаем изучение тензорных произведений представлений группы $G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Ранее мы рассмотрели произведение двух бесконечномерных представлений, см. [1], затем мы изучили произведение двух конечномерных представлений, см. [2]. Некоторые задачи для произведения бесконечномерного представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ и конечномерного представления π_m были рассмотрены в [3]. В настоящей статье мы предъявляем сплетающие операторы для семейства представлений $T_{\sigma,\varepsilon}\times\pi_m$ и изучаем их действия на базисах. Здесь $\sigma\in\mathbb{C}$, $\varepsilon=0,1$, $2m\in\mathbb{N}$. Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ – бесконечномерное, для определенности мы будем считать, что σ – общего проложения, то есть $2\sigma\notin\mathbb{N}$, представление π_m – конечномерное, его размерность равна $2m+1$,

Напомним описание неприводимых представлений группы $G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Эта группа состоит из вещественных матриц второго порядка с определителем единица:

$$g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1.$$

Пусть $\sigma\in\mathbb{C}$, $\varepsilon=0,1$. Рассмотрим серию представлений $T_{\sigma,\varepsilon}$ группы G, индуцированных характерами $p\mapsto c^{2\sigma,\varepsilon}$ верхней треугольной подгруппы. Мы считаем, что группа G действует на плоскости $\mathbb{R}^2$ справа, соответственно этому векторы $x=(x_1,x_2)$ из $\mathbb{R}^2$ мы записываем в виде строки. Обозначим через $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$ пространство функций f из $C^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$, удовлетворяющих условию однородности

$$f(\lambda x)=\lambda^{2\sigma,\varepsilon}f(x),\quad \lambda\in\mathbb{R}^*.$$

Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ действует правыми сдвигами в пространстве $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$:

$$(T_{\sigma,\varepsilon}(g)f)(x)=f(xg)$$

Рассмотрим представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ в компактной картине. Пусть $|x|$ – евклидова длина вектора $x=(x_1,x_2)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$: $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$. Обозначим через S окружность $|x|=1$.

Ограничим функции f из $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$ на S. Мы получим пространство $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ функций φ из $\mathcal{D}(S)$ четности ε:

$$\varphi(-s)=(-1)^\varepsilon\varphi(s).$$

Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ действует в $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ так:

$$(T_{\sigma,\varepsilon}(g)\varphi)(s) = \varphi\left(\frac{sg}{|sg|}\right)|sg|^{2\sigma}.$$

Пусть α – координата на S: точка s из S есть $s=(\sin\alpha,\cos\alpha)$. Иногда вместо $\varphi(s)$ мы будем писать $\varphi(\alpha)$.

Введем оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$, действующий в функциях из $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$:

$$(A_{\sigma,\varepsilon}\varphi)(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\sin(\alpha-\beta)]^{-2\sigma-2,\,\varepsilon}\,\varphi(\beta)\,d\beta.$$

Он сплетает $T_{\sigma,\varepsilon}$ с $T_{-\sigma-1,\,\varepsilon}$, т. е.

$$T_{-\sigma-1,\,\varepsilon}(g)A_{\sigma,\varepsilon} = A_{\sigma,\varepsilon}T_{\sigma,\varepsilon}(g),\quad g\in G.$$

Множитель перед интегралом поставлен для удобства формул в дальнейшем. Интеграл абсолютно сходится при $\operatorname{Re}\sigma<-1/2$ и распространяется по аналитичности в плоскость σ до мероморфной функции.

Возьмем в $\mathcal{D}(S)$ базис

$$\varphi_k(\alpha) = e^{ik\alpha},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Базис в $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ состоит из функций φ_k, для которых $k\equiv\varepsilon$. Здесь и дальше знак сравнения означает сравнение по модулю 2. Оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$ переводит функцию φ_k в себя с множителем:

$$A_{\sigma,\varepsilon}\varphi_k = a(\sigma,\varepsilon;\,k)\,\varphi_k,$$

где

$$\begin{aligned} a(\sigma,\varepsilon;\,k) &= i^{-k}\,\pi\,2^{2\sigma+2}\frac{\Gamma(-2\sigma-1)}{\Gamma\left(-\sigma-k/2\right)\,\Gamma\left(-\sigma+k/2\right)}\\ &= i^{-k}\,\pi^{-1}\,2^{2\sigma+1}\left[(-1)^\varepsilon-\cos 2\sigma\pi\right]\Gamma(-2\sigma-1)\times\\ &\times\Gamma\left(\sigma-k/2+1\right)\,\Gamma\left(\sigma+k/2+1\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Отсюда следует, что композиция $A_{\sigma,\varepsilon}$ и $A_{-\sigma-1,\varepsilon}$ есть скалярный оператор:

$$A_{-\sigma-1,\varepsilon}\,A_{\sigma,\varepsilon} = \omega_0(\sigma,\varepsilon)\cdot E,$$

где

$$\omega_0(\sigma,\varepsilon) = \frac{2\pi}{2\sigma+1}\cdot\frac{1-(-1)^\varepsilon\cos 2\sigma\pi}{\sin 2\sigma\pi}.$$

Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ *неприводимо*, за исключением случая, когда $2\sigma\in\mathbb{Z}$ и $2\sigma\equiv\varepsilon$. Пусть $2\sigma\in\mathbb{N}$, $\varepsilon\equiv 2\sigma$, тогда представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ имеет инвариантное неприводимое конечномерное подпространство

$$V_\sigma = \{\varphi_k : -2\sigma\leqslant k\leqslant 2\sigma,\ k\equiv\varepsilon\},$$

так что $\dim V_\sigma = 2\sigma+1$. В этом случае обозначим через π_σ ограничения на V_σ представления $T_{\sigma,\varepsilon}$. Число σ называется *старшим весом* представления π_σ. Представления π_σ, $2\sigma\in\mathbb{N}$, исчерпывают неприводимые конечномерные представления группы G. Оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$ обращается в нуль на пространстве V_σ.

Нам потребуются некоторые результаты из [3]. В этой работе [3] мы разлагаем тензорное произведение $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$ на неприводимые составляющие, см. теорему 1, и находим в явном виде операторы, сплетающие эти неприводимые составляющие и наше тензорное произведение (преобразования Пуассона), см. теорему 2. Для определенности мы будем считать , что σ – общего положения, то есть $2\sigma \notin \mathbb{N}$, представление π_m – конечномерное, его размерность равна $2m+1$.

Тензорное произведение $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$ действует в пространстве $\mathcal{D}_\varepsilon(S) \otimes V_m$ функций $f(s,t)$ четности

$$\nu = \varepsilon + 2m$$

на прямом произведении $S \times S$ двух окружностей:

$$f(-s,-t) = (-1)^{\varepsilon+2m} f(s,t).$$

Для точек s первой окружности из прямого произведения $S \times S$ берем параметр α , так что $s=(\sin\alpha,\cos\alpha)$, а для точек t второй окружности берем параметр β , так что $t=(\sin\beta,\cos\beta)$. Обозначим

$$v = \alpha - \beta.$$

Мы будем использовать следующие обозначения для "обобщенных степеней" :

$$a^{[m]} = a(a+1)\ldots(a+m-1), \quad a^{(m)} = a(a-1)\ldots(a-m+1),$$

где a – число или оператор.

Т е о р е м а 1. [3] *Тензорное произведение* $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$ *распадается в прямую однократную сумму неприводимых представлений*

$$T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m = T_{\sigma-m,\nu} + T_{\sigma-m+1,\nu} + \ldots + T_{\sigma+m,\nu} \, .$$

Соответственно, пространство $\mathcal{D}_\varepsilon(S) \otimes V_m$ *распадается в прямую однократную сумму неприводимых подпространств* W_k , $k=0,1,2,\ldots,2m$. *Подпространство* W_k *есть образ преобразования Пуассона* $M_k^{(\sigma)}$, *отображающего пространство* $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ *в пространство* $\mathcal{D}_\varepsilon(S) \otimes V_m$ *и сплетающего представление* $T_{\sigma-m+k,\nu}$ *с тензорным произведением* $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$. *Явный вид преобразований Пуассона дается в Теореме* 2 *ниже.*

Обозначим

$$\tau = \sigma - m + k.$$

Следовательно, ограничение представления $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$ на W_k эквивалентно представлению $T_{\tau,\nu}$, а само представление $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$ есть прямая однократная сумма:

$$T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m = \sum T_{\tau,\nu},$$

суммирование происходит по $\tau \in \{\sigma-m, \sigma-m+1, \ldots, \sigma+m\}$.

Т е о р е м а 2. [3] *Преобразование Пуассона* $M_k^{(\sigma)}$, $k=0,1,2,\ldots,2m$, *есть дифференциальный оператор, он дается одним из следующих двух явных выражений:*

$$M_k^{(\sigma)} =(\sin v)^{2m-k} \sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}(2\tau-k+1)^{[k-r]} \times$$
$$\times (i\sin v)^r e^{i(k-r)v}\cdot\left(2\tau-i\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{\langle r\rangle},$$
$$M_k^{(\sigma)} =(\sin v)^{2m-k}\left[(\sin v)\frac{\partial}{\partial\alpha}-(2\tau-k+1)\,\cos v\right]\times$$
$$\times\left[(\sin v)\frac{\partial}{\partial\alpha}-(2\tau-k+2)\,\cos v\right]\times$$
$$\ldots$$
$$\times\left[(\sin v)\frac{\partial}{\partial\alpha}-2\tau\,\cos v\right].$$

В частности, оператор $M_k^{(\sigma)}$ экспоненте $\varphi_{2p}(s)$ из $\mathcal{D}_\nu(S)$ сопоставляет некоторый вектор $u_{k,p}^{(\sigma)}$ из $\mathcal{D}_\varepsilon(S)\otimes V_m$. Он принадлежит подпространству H_p в $\mathcal{D}_\varepsilon(S)\otimes V_m$ с базисом $\varphi_{r,h}$, $r+h=2p$, так что $2p\equiv\varepsilon+2m$. Все пространство $\mathcal{D}_\varepsilon(S)\otimes V_m$ распадается в прямую однократную сумму подпространств H_p , $2p\in\mathbb{Z}$, $2p\equiv\varepsilon+2m$. Размерность H_p равна $2m+1$.

Вот явное выражение (напомним, что $v=\alpha-\beta$):

$$u_{k,p}^{(\sigma)}(\alpha,\beta)=e^{2pi\alpha}\,(\sin v)^{2m-k}\,(-1)^k\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(2\tau-r)^{(k-r)}\times$$
$$\times\, e^{i(k-r)v}\,(-2i\sin v)^r\cdot(\tau+p)^{(r)}, \qquad (2)$$

Т е о р е м а 3. *Всякий оператор, сплетающий два представления из совокупности* $T_{\sigma,\varepsilon}\otimes\pi_m$, *есть либо скалярный оператор (сплетающий представление с самим собой), либо с точностью до множителя оператор* $A_{\sigma,\varepsilon}\otimes 1$, *сплетающий представление* $T_{\sigma,\varepsilon}\otimes\pi_m$ *с представлением* $T_{-\sigma-1,\,\varepsilon}\otimes\pi_m$, *то есть*

$$(T_{-\sigma-1,\,\varepsilon}\otimes\pi_m)(g)(A_{\sigma,\varepsilon}\otimes 1)=(A_{\sigma,\varepsilon}\otimes 1)(T_{\sigma,\varepsilon}\otimes\pi_m)(g),\quad g\in G.$$

Теорема сразу следует из аналогичного утверждения для совокупности $T_{\sigma,\varepsilon}$ и оператора $A_{\sigma,\varepsilon}$.

Заменим в разложении из Теоремы 1 представления на эквивалентные: в левой части заменяем σ на $-\sigma-1$, а в правой части заменяем $\sigma-m+k$ на $-(\sigma-m+k)-1=(-\sigma-1-m)+(2m-k)$, получаем:

$$T_{-\sigma-1,\varepsilon}\otimes\pi_m=\sum_{k=0}^{2m}T_{(-\sigma-1-m)+(2m-k),\,\varepsilon+2m}\,.$$

Следовательно, оператор $A_{\sigma,\varepsilon}\otimes 1$ переводит образ преобразования Пуассона $M_k^{(\sigma)}$ в образ преобразования Пуассона $M_{2m-k}^{(-\sigma-1)}$ и потому переводит вектор $u_{k,p}^{(\sigma)}$ в вектор $u_{2m-k,p}^{(-\sigma-1)}$ с множителем. Приведем точные формулы.

Т е о р е м а 4. *Имеет место равенство*

$$(A_{\sigma,\varepsilon}\otimes 1)\,u^{(\sigma)}_{k,p}=\lambda(\sigma,\varepsilon;k,p)\,u^{(-\sigma-1)}_{2m-k,p}\,, \tag{3}$$

где

$$\lambda(\sigma,\varepsilon;k,p)=(2i)^{2m-2k}\,(-1)^k\,i^{-2p+2m}c(\sigma,\varepsilon)\times$$
$$\times\,\Gamma(\sigma-m+k+p+1)\Gamma(\sigma-m+k-p+1). \tag{4}$$

Для д о к а з а т е л ь с т в а нам остается вычислить этот множитель λ. В выражении (2) только одно слагаемое содержит экспоненту $\exp(-2mi\alpha)$, а именно, слагаемое с номером $r=k$, оно есть (напомним, что $v=\alpha-\beta$)

$$(2i)^{2m-k}(-1)^k(\sigma-m+k+p)^{(k)}\cdot e^{2ip\alpha}e^{-2imv}\,. \tag{5}$$

Поэтому нам достаточно проследить за слагаемыми с номером $r=k$. Это слагаемое для вектора $u^{(-\sigma-1)}_{2m-k,p}$ получается из (5) заменой $\sigma\mapsto-\sigma-1$ и $k\mapsto 2m-k$, после преобразований получаем, что оно есть

$$(2i)^{k}(\sigma+m-p)^{(2m-k)}\cdot e^{2ip\alpha}e^{-2imv}\,. \tag{6}$$

В силу (1) такое же слагаемое для $(A_{\sigma,\varepsilon}\otimes 1)\,u^{(\sigma)}_{k,p}$ есть

$$(2i)^{2m-k}(-1)^k(\sigma-m+k+p)^{(k)}\,i^{-2p+2m}c(\sigma,\varepsilon)\times$$
$$\times\,\Gamma(\sigma+p-m+1)\Gamma(\sigma-p+m+1)\cdot e^{2ip\alpha}e^{-2imv}\,, \tag{7}$$

где обозначено (ср. (1))

$$c(\sigma,\varepsilon)=\pi^{-1}\,2^{2\sigma+1}\,[(-1)^{\varepsilon}-\cos 2\sigma\pi]\,\Gamma(-2\sigma-1)\,.$$

В выражении (7) мы сделаем следующие преобразования:

$$(\sigma-m+k+p)^{(k)}\;\Gamma(\sigma+p-m+1)=\Gamma(\sigma-m+k+p+1),$$
$$\Gamma(\sigma-p+m+1)=(\sigma-p+m)^{(2m-k)}\;\Gamma(\sigma-m+k-p+1).$$

Мы получим это выражение в виде

$$(2i)^{2m-k}(-1)^k(\sigma-p+m)^{(2m-k)}\,i^{-2p+2m}c(\sigma,\varepsilon)\times$$
$$\times\,\Gamma(\sigma-m+k+p+1)\Gamma(\sigma-m+k-p+1)\cdot e^{2ip\alpha}e^{-2imv}\,,$$

Сравнивая это с (3), (5), (6), убеждаемся в справедливости формулы (4). □

Оказывается, см. (9) ниже, этот коэффициент λ только множителем отличается от коэффициента a из (1) – с другими параметрами, а именно, от коэффициента $a(\sigma-m+k,\varepsilon+ +2m;2p)$. Мы используем связь:

$$c(\sigma,\varepsilon)=2^{2m-2k}(-1)^{2m}\frac{\Gamma(-2\sigma-1)}{\Gamma(-2\sigma+2m-2k-1)}\cdot c(\sigma-m+k,\varepsilon+2m),$$

и получаем, что

$$\lambda(\sigma,\varepsilon;k,p)=b(\sigma,k)\cdot a(\sigma-m+k,\varepsilon+2m;2p), \tag{9}$$

где

$$b(\sigma,k)=2^{\,4m-4k}\frac{\Gamma(-2\sigma-1)}{\Gamma(-2\sigma+2m-2k-1)}\,.$$

Т е о р е м а 5. *Оператор* $A_{\sigma,\varepsilon} \otimes 1$ *действует на векторы* $u_{k,p}^{(\sigma)}$ *аналогично тому, как оператор* $A_{\sigma-m+k,\varepsilon+2m}$ *действует на функции* $\varphi_{2p}(s)$ *– формулы отличаются общим множителем, а именно,*

$$(A_{\sigma,\varepsilon} \otimes 1)\, u_{k,p}^{(\sigma)} = b(\sigma, k) \cdot a(\sigma - m + k, \varepsilon + 2m; 2p) \cdot u_{2m-k,p}^{(-\sigma-1)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Молчанов В.Ф.* Тензорные произведения унитарных представлений трехмерной группы Лоренца // Известия АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 4. С. 860–891.

2. *Молчанов В.Ф.* Преобразования Пуассона и Фурье для тензорных произведений // Функциональный анализ и его приложения. 2015. Т. 49. Вып. 4. С. 50–60.

3. *Molchanov V.F.* Poisson transforms for tensor products in compact picture // Geometric Methods in Physics. XXXV Workshop 2016. Trends in Mathematics, Springer International Publishing, 2017 (in print).

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы Министерства образования и науки РФ № 2014/285 (проект № 2476).

Поступила в редакцию 20 октября 2016 г.

Молчанов Владимир Федорович, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры функционального анализа, e-mail: v.molchanov@bk.ru

UDC 517.98
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2047-2053

INTERTWINING OPERATORS FOR TENSOR PRODUCTS

© **V. F. Molchanov**

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: v.molchanov@bk.ru

We give a description of intertwining operators for the tensor product of an infinite-dimensional and a finite-dimensional representation of the group $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.
Key words: Lie groups and Lie algebras; representations of Lie groups; tensor products; intertwining operators

REFERENCES

1. *Molchanov V.F.* Tensor products of unitary representations of the three-dimensional Lorentz group // Izv. AN USSR. Ser. matem., 1979. V. 43. № 4. P. 860–891.

2. *Molchanov V.F.* Poisson and Fourier transforms for tensor products // Funkts. Analiz Prilozh., 2015. V. 49. Iss. 4. P. 50–60.

3. *Molchanov V.F.* Poisson transforms for tensor products in compact picture // Geometric Methods in Physics. XXXV Workshop 2016. Trends in Mathematics, Springer International Publishing, 2017 (in print).

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the state program of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation № 2014/285 (project № 2476).

Received 20 October 2016

Molchanov Vladimir Fedorovich, Tambov State University named after G. R. Derzhavin, the Russian Federation, doctor of physics-mathematics, Professor, Professor of the Functional Analysis Department,, e-mail: v.molchanov@bk.ru

Информация для цитирования:

Молчанов В.Ф. Сплетающие операторы для тензорных произведений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2047-2053. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2047-2053

Molchanov V.F. Spletayuschie operatory dlya tenzornyh proizvedenij [Intertwining operators for tensor products]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 2047-2053. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2047-2053 (In Russian)