Гончарова Елена Владимировна, Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, e-mail: goncha@icc.ru
Goncharova Elena Vladimirovna, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, e-mail: goncha@icc.ru

Старицын Максим Владимирович, Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, e-mail: starmax@icc.ru
Staritsyn Maxim Vladimirovich, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, e-mail: starmax@icc.ru

УДК 517.97

# РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© **А.А. Горшков**

*Ключевые слова*: оптимальное управление; параболическое уравнение; двойственная регуляризация; устойчивость; поточечное фазовое ограничение; лебегово пространство; принцип Лагранжа; принцип максимума Понтрягина.
Рассматриваются устойчивые к ошибкам исходных данных секвенциальные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в выпуклой задаче оптимального управления со строго равномерно выпуклым целевым функционалом, распределенным управлением и поточечными фазовыми ограничениями для параболического уравнения. Распределенные управления считаются принадлежащими лебегову пространству суммируемых с $p$-той степенью функций при $p \in (2+\infty)$. Образы задающих поточечные фазовые ограничения операторов вкладываются в лебегово пространство суммируемых с $s$-той степенью функций при $s \in (1,2)$.

**Введение.** Задачам оптимизации и, в частности, условной оптимизации, характерны различные проявления неустойчивости [1]. В случае достаточно сложных реальных задач, когда их исходные данные могут задаваться с погрешностью, а процесс решения задач неразрывно связан с применением приближенных методов, проблемы неустойчивости являются центральными, требующими их обязательного учета. Указанная неустойчивость оптимизационных задач, в свою очередь, порождает и «неустойчивость» классических условий оптимальности, в частности, таких, как принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина. Это проявляется в выделении классическими условиями оптимальности сколь угодно далеких «возмущенных» оптимальных элементов от их «невозмущенных» аналогов при сколь угодно малых возмущениях исходных данных задач [2]. Указанные проблемы неустойчивости характерны и для рассматриваемой ниже задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями для линейного параболического уравнения, а также для соответствующих классических условий оптимальности для нее — принципу Лагранжа и принципу максимума Понтрягина.

В работах [2–4], с целью преодоления неустойчивости классического принципа Лагранжа в задачах выпуклого программирования, было предложено рассматривать т. н. регуляризованные или, другими словами, устойчивые секвенциальные принцип Лагранжа, теорему Куна–Таккера, обоснование которых опирается на метод двойственной регуляризации [5, 6]. В свою очередь, в работах [7–9] этот метод был применен для получения регуляризованных принципа Лагранжа в недифференциальной форме и принципа максимума Понтрягина для выпуклой задачи оптимального управления линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства. В данной работе схема доказательства регуляризованных условий оптимальности [7–9] применяется для получения регуляризованных принципа Лагранжа в недифференциальной форме и принципа максимума Понтрягина в выпуклой задаче оптимального управления линейным параболическим дифференциальным уравнением с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства. Принципиальным отличием от [7–9] рассматриваемой здесь ситуации является то, что распределенные управления считаются принадлежащими пространству суммируемых с $p$-той степенью функций при $p \in (2, +\infty)$, в свою очередь, образы задающих поточечные фазовые ограничения операторов вкладываются в пространство суммируемых с $s$-той степенью функций при $s \in (1, 2)$. В то же время в [7–9] и в том и в другом случаях использовались гильбертовы пространства суммируемых с квадратом функций. Пространство суммируемых с квадратом функций используется в обоих случаях также и в работе [10] настоящего выпуска Вестника Тамбовского университета. Смысл применения рефлексивных лебеговых пространств вместо более привычных гильбертовых, состоит в том, что это существенно расширяет класс задач оптимального управления и сводящихся к ним задач (например, обратных задач), в которых могут быть получены регуляризованные условия оптимальности. Прежде всего, это происходит за счет присоединения к нему новых оптимизационных задач, связанных с уравнениями в частных производных, что, в частности, связано с: 1) улучшением свойств регулярности решений уравнений в частных производных, свойств дифференцируемости функций Лагранжа этих оптимизационных задач за счет увеличения степени суммируемости коэффициентов начально-краевых задач; 2) улучшением аналогичных свойств решений сопряженных уравнений принципа максимума в задачах оптимального управления при погружении образов операторов, задающих ограничения, в функциональные классы суммируемых с $s$-ой степенью функций при $s \in (1, 2)$.

При обосновании получаемых в работе и выражаемых в терминах минимизирующих приближенных решений в смысле Дж. Варги [11] устойчивых секвенциальных принципа Лагранжа, принципа максимума Понтрягина, помимо указанной выше общей схемы работ [7–9], самым существенным образом используется и разработанная ранее схема получения устойчивого секвенциального принципа Лагранжа в задаче выпуклого программирования, допустимые элементы в которой, а также образы задающих ограничения операторов вкладываются в рефлексивные банаховы пространства [12–14].

**Постановка задачи оптимального управления.** Пусть $U \subset \mathbb{R}^1$ — выпуклый компакт, $\Omega$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$, $Q_{\iota,T} \equiv \Omega \times (\iota, T)$, $\iota \in (0,T)$, $S \equiv \partial\Omega$, $S_T \equiv \{(x,t) : x \in S,\ t \in (0,T)\}$, $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_\infty(Q_T) : u(x,t) \in U$ п.в. на $Q_T\} \subset$ $\subset L_p(Q_T) \equiv \mathcal{B}$, $p > 2$, $\overline{M}$ — замыкание множества $M$.

Рассмотрим задачу оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства

$$(P^\delta) \qquad f^\delta(u) \to \min,\ u \in \mathcal{D} \subset \mathcal{B},\ g_1^\delta(u)(x,t) = h^\delta(x,t),\ g_2^\delta(u)(x,t) \leqslant 0 \text{ при п.в. } (x,t) \in X,$$

$$f^\delta(u) \equiv \left\langle A_{0,1}^\delta(\cdot,\cdot) z^\delta[u](\cdot,\cdot), z^\delta[u](\cdot,\cdot)\right\rangle_{L_2(Q_T)} +$$

$$+\left\langle A_{0,2}^\delta(\cdot) z^\delta[u](\cdot,T), z^\delta[u](\cdot,T)\right\rangle_{L_2(\Omega)} + \left\langle A_{0,3}^\delta(\cdot,\cdot) z^\delta[u](\cdot,\cdot), z^\delta[u](\cdot,\cdot)\right\rangle_{L_2(S_T)} + \|u\|_{p,Q_T}^\gamma,\ \gamma > 1,$$

где $f^\delta : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ — непрерывный строго равномерно выпуклый функционал, $g_1^\delta(u)(x,t) \equiv \equiv \varphi_1^\delta(x,t) z^\delta[u](x,t)$, $g_2^\delta(u)(x,t) \equiv \varphi_2^\delta(x,t,z^\delta[u](x,t))$, $\varphi_1^\delta, h^\delta \in L_\infty(X)$, $\varphi_2^\delta$ — непрерывная по совокупности переменных функция, выпуклая по $z$ при всех $(x,t) \in X \subset \overline{Q}_{\iota,T}$, $\iota \in (0,T)$, множество $X$ совпадает с замыканием своей внутренности, функции $A_{0,1}^\delta : Q_T \to \mathbb{R}^1$ и $A_{0,3}^\delta : S_T \to \mathbb{R}^1$ являются измеримыми по Лебегу, $A_{0,2}^\delta \in C(\overline{\Omega})$, $z^\delta[u]$ — решение класса [2] $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ третьей начально-краевой задачи для параболического уравнения дивергентного вида [15]

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\bigl(a_{i,j}(x,t) z_{x_j}\bigr) + a^\delta(x,t) z + u(x,t) = 0, \tag{1}$$

$$z(x,0) = v_0^\delta(x),\ x \in \Omega,\ \frac{\partial z}{\partial N} + \sigma^\delta(x,t) z = w_0^\delta(x,t),\ (x,t) \in S_T,$$

где $\frac{\partial z(x,t)}{\partial N} \equiv a_{i,j}(x,t) z_{x_j}(x,t) \cos\alpha_i(x,t)$, $\alpha_i(x,t)$ — угол, образованный внешней нормалью $N$ к $S$ с осью $x_i$, $a^\delta \in L_\infty(Q_T)$, $a^\delta \geqslant C_0$, $C_0$ — положительная постоянная, $\sigma^\delta \in L_\infty(S_T)$, $\sigma^\delta \geqslant C_0$, $v_0^\delta \in C(\overline{\Omega})$, $w_0^\delta \in L_\infty(S_T)$ — заданные функции. Верхний индекс $\delta$ в исходных данных задачи $(P^\delta)$ означает, что они соответствуют либо ситуации их точного задания $(\delta = 0)$, либо являются возмущенными $(\delta > 0)$, т. е. задаются с ошибкой, $\delta \in (0,\delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое фиксированное число. Будем считать, что выполняются следующие оценки

$$\|A_{0,1}^\delta - A_{0,1}^0\|_{\infty,Q_T},\ |A_{0,2}^\delta - A_{0,2}^0|_{\Omega}^{(0)},\ \|A_{0,3}^\delta - A_{0,3}^0\|_{\infty,S_T} \leqslant \delta, \tag{2}$$

$$\|a^\delta - a^0\|_{\infty,Q_T},\ |v_0^\delta - v_0^0|_{\Omega}^{(0)},\ \|w_0^\delta - w_0^0\|_{\infty,S_T}, \|\sigma^\delta - \sigma^0\|_{\infty,S_T},\ \|\varphi_1^\delta - \varphi_1^0\|_{\infty,X},\ \|h^\delta - h^0\|_{\infty,X} \leqslant \delta,$$

$$|\varphi_2^\delta(x,t,z) - \varphi_2^0(x,t,z)| \leqslant L_M \delta\bigl(1 + |z|\bigr)\,\forall\,(x,t) \in X,\ z \in S_M^1,$$

где $L_M$ — постоянная не зависящая от $(x,t) \in X$, $S_M^1 \equiv \{z \in \mathbb{R}^1 : |z| \leqslant M\}$.

Далее, предположим, что решение задачи $(P^0)$ существует, обозначим его через $u^0$. Считаем операторы $g_1^\delta$, $g_2^\delta$ действующими в пространство $L_s(X)$, $s \in (1,2)$. Двойственность между $L_s(X)$ и $L_q(X)$ определим с помощью функционала $\langle l, v\rangle$, $l \in L_s(X)$, $v \in \in L_q(X)$. Введем функцию Лагранжа задачи $(P^\delta)$, а также двойственную задачу

$$L^\delta(u,\lambda,\mu) \equiv f^\delta(u) + \bigl\langle \lambda, g_1^\delta(u) - h^\delta \bigr\rangle + \bigl\langle \mu, g_2^\delta(u)\bigr\rangle,\ u \in \mathcal{D},\ (\lambda,\mu) \in L_q(X) \times L_q(X),\ \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 1,$$

$$V^\delta(\lambda,\mu) \equiv \min_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u,\lambda,\mu) \to \sup,\ (\lambda,\mu) \in L_q(X) \times L_q^+(X),$$

где $L_q^-(X) \equiv \{z \in L_q(X) :\ z(x,t) \leqslant 0 \text{ при п.в. } (x,t) \in X\}$, $L_q^+(X) = -L_q^-(X)$. Обозначим: $\mathcal{D}^{\delta,\varepsilon} \equiv \{u \in \mathcal{D} : \|g_1^\delta(u)\|_{s,X} \leqslant \varepsilon,\ \min\limits_{z \in L_s^-(X)} \|g_2^\delta(u) - z\|_{s,X} \leqslant \varepsilon\}$, $\varepsilon \geqslant 0$, $\mathcal{D}^{0,0} \equiv \mathcal{D}^0$. Центральным в работе является понятие минимизирующего приближенного решения (МПР) в смысле Дж. Варги [11] в задаче $(P^0)$, под которым понимается последовательность элементов $u^i \in \in \mathcal{D}$, $i = 1,2,\ldots$, такая, что $f^0(u^i) \leqslant \beta + \delta^i$, $u^i \in \mathcal{D}^{0,\varepsilon^i}$ для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел $\delta^i$, $\varepsilon^i$, $i = 1,2,\ldots$, $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \beta_\varepsilon$, $\beta_\varepsilon \equiv \inf\limits_{u \in \mathcal{D}^{0,\varepsilon}} f^0(u)$.

Следствием введеных выше условий на исходные данные задачи $(P^\delta)$ и теорем существования обобщенного (слабого) решения третьей краевой задачи для линейного параболического уравнения дивергентного вида, которые могут быть найдены в [15], является разрешимость начально-краевой задачи (1) в классе $V_2^{1,0}(Q_T)$.

[2]Здесь и ниже мы используем обозначения функциональных пространств и норм их элементов принятые в монографии [15].

У т в е р ж д е н и е 1. *Для любого* $u \in L_2(Q_T)$ *при любом* $T > 0$ *и любом* $\delta \in [0, \delta_0]$ *исходная (прямая) задача* (1) *однозначно разрешима в* $V_2^{1,0}(Q_T)$ *и справедлива оценка*

$$\left| z^\delta[\pi] \right|_{Q_T} + \left\| z^\delta[\pi] \right\|_{2,S_T} \leqslant C_T\big(\|u\|_{2,Q_T} + \|v_0\|_{2,\Omega} + \|w_0\|_{2,S_T}\big),$$

*в которой постоянная* $C_T$ *не зависит от управления* $u \in L_2(Q_T)$ *и* $\delta \in [0, \delta_0]$.

Одновременно отметим, что для полной определенности постановки задачи $(P^\delta)$ сформулированного выше утверждения недостаточно, так как оно, вообще говоря, не гарантирует необходимого включения $z^\delta[u] \in C(\overline{Q}_T)$. Однако из наложенных выше условий и теорем существования слабого решения третьей краевой задачи для линейного параболического уравнения дивергентного вида следует одновременно и нужная разрешимость начально-краевой задачи (1) в классе $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ [16]. Можно утверждать, что справедливо аналогичное утверждению 1

У т в е р ж д е н и е 2. *Для любого управления* $u \in L_p(Q_T)$ *при любом* $T > 0$ *и любом* $\delta \in [0, \delta_0]$ *однозначно разрешима в* $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ *прямая задача* (1) *и справедлива при* $p > n/2 + 1$, $r > n + 1$ *оценка*

$$\left| z^\delta[u] \right|_{Q_T}^{(0)} \leqslant C_T\big(\|u\|_{p,Q_T} + |v_0|_{\Omega}^{(0)} + \|w_0\|_{r,S_T}\big),$$

*в которой постоянная* $C_T$ *не зависит от* $\delta \in [0, \delta_0]$ *и управления* $u \in L_p(Q_T)$.

На основе оценок (2) и утверждений 1, 2 можно заключить, что

$$\left| f^\delta(u) - f^0(u) \right| \leqslant C_1\delta, \quad \forall\, u \in L_p(Q_T), \tag{3}$$

$$\left\| g_1^\delta(u) - g_1^0(u) \right\|_{s,X} \leqslant C_2\delta\big(1 + \|u\|_{p,Q_T}\big), \ \left\| g_2^\delta(u) - g_2^0(u) \right\|_{s,X} \leqslant C_3\delta\big(1 + \|u\|_{p,Q_T}\big) \ \forall\, u \in L_p(Q_T),$$

в которых постоянные $C_1, C_2, C_3 > 0$ не зависят от $\delta \in [0, \delta_0]$ и $u \in \mathcal{D}$.

**Двойственная регуляризация для задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями.** Благодаря оценкам (3) мы можем применить метод двойственной регуляризации [5, 6] для построения минимизирующего приближенного решения в задаче $(P^0)$. В соответствии с [12–14] рассмотрим двойственный регуляризирующий функционал

$$R^{\delta,\alpha}(\lambda, \mu) \equiv V^\delta(\lambda, \mu) - \alpha \left\|(\lambda, \mu)\right\|^k \to \sup, \ (\lambda, \mu) \in L_q(X) \times {L^+}_q(X), \ \alpha > 0, \ k > 2,$$

и предположим, что выполняется условие согласования $\delta/\alpha(\delta) \to 0, \ \alpha(\delta) \to 0, \ \delta \to 0$. Заметим, что множество точек максимума функции $R^{\delta,\alpha}(\lambda, \mu)$, вообще говоря, может состоять и не из одной точки. Далее будем работать с некоторой произвольно выбранной точкой максимума $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}) \in \operatorname{Argmax}\{R^{\delta,\alpha}(\lambda, \mu) : \ (\lambda, \mu) \in L_q(X) \times {L^+}_q(X)\}$. Процесс двойственной регуляризации приводит к конструированию минимизирующего приближенного решения в задаче $(P^0)$ из элементов $u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] = \operatorname{argmin}\{L^\delta(u, \lambda, \mu), \ u \in \mathcal{D}\}$.

Имеет место сходимость метода двойственной регуляризации [7–9] в равномерно выпуклом простанстве [12–14].

Т е о р е м а 1. *Вне зависимости от того, разрешима или нет, двойственная к* $(P^0)$ *задача, при* $\delta \to 0$ *имеют место предельные соотношения*

$$g_1^0\big(u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\big) - h^0 \to 0, \ g_2^0\big(u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\big) \leqslant \phi(\delta), \ \|\phi(\delta)\| \to 0,$$

$$\left\langle (\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}), \Big(g_1^\delta\big(u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\big) - h^\delta, g_2^\delta\big(u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\big)\Big) \right\rangle \to 0,$$

$$\alpha(\delta)\left\|(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)})\right\| \to 0, \ f^0\big(u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\big) \to \min_{u \in \mathcal{D}^0} f^0(u),$$

$$\left\| u^{\delta}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - u^0 \right\| \to 0,$$

*неравенство* $g_2^0\big(u^{\delta}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\big) \leqslant \phi(\delta)$ *понимается в смысле упорядоченности по конусу неположительных функций в* $L_s(X)$ *, то есть* $g_2^0\big(u^{\delta}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\big) - \phi(\delta) \in L^-{}_s$ *. Одновременно справедливо равенство*

$$\lim_{\delta\to+0} V^0(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}) = \sup_{(\lambda,\mu)\in L_q(X)\times L^+{}_q(X)} V^0(\lambda,\mu).$$

**Регуляризованный принцип Лагранжа в задаче оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями.** Теорема 1 открывает возможность сформулировать в терминах классической конструкции функции Лагранжа и доказать следующий устойчивый секвенциальный принцип Лагранжа в задаче $(P^0)$ .

Т е о р е м а 2. *Для того, чтобы в задаче* $(P^0)$ *существовало МПР, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность двойственных переменных* $(\lambda^k,\mu^k) \in L_q(X)\times L^+{}_q(X)$, $k=1,2,\ldots$ *такая, что* $\delta^k\left\|(\lambda^k,\mu^k)\right\| \to 0$, $k\to\infty$ *и выполняются соотношения*

$$u^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k] \in D^{\delta^k,\varepsilon^k},\ \varepsilon^k \to 0,\ k\to\infty, \tag{4}$$

$$\left\langle (\lambda^k,\mu^k), \left( g_1^{\delta^k}\big(u^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\big) - h^{\delta^k}, g_2^{\delta^k}\big(u^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\big)\right)\right\rangle \to 0,\ k\to\infty. \tag{5}$$

*Последовательность* $u^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\ldots$ *является искомым МПР и элементы* $u^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$ *сильно сходятся при* $k\to\infty$ *к* $u^0$ *. В качестве последовательности* $(\lambda^k,\mu^k)$, $k=1,2,\ldots$ *может быть взята последовательность, генерируемая методом двойственной регуляризации теоремы 1. Как следствие соотношений* (4) , (5) *выполняется и предельное соотношение*

$$V^0(\lambda^k,\mu^k) \to \sup_{(\lambda,\mu)\in L_q(X)\times L^+{}_q(X)} V^0(\lambda,\mu),\ k\to\infty.$$

*Одновременно, каждая слабая предельная точка последовательности* $(\lambda^k,\mu^k)$, $k=1,2,\ldots$ *является решением двойственной задачи* $V^0(\lambda,\mu)\to\sup$ , $(\lambda,\mu)\in L_q(X)\times L^+{}_q(X)$ .

**Регуляризованный принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями.** Пусть помимо введенных выше условий на исходные данные существует непрерывный по $z$ градиент $\nabla_z\varphi_2(x,t,z)$ . Вложение образов операторов $g_1$, $g_2$ в лебегово пространство $L_s(X)$, $s\in(1,2)$ , позволяет считать множители Лагранжа $\lambda,\mu$ элементами лебегова пространства $L_q(X)$ с достаточно большим показателем суммируемости $q$ . Величина показателя $q$ может быть взята такой, что это обеспечивает в совокупности с предложением 2 и теоремой 10.1 в [15], о гельдеровости решений линейного параболического уравнения, возможность применения обычного игольчатого варьирования в простейшей задаче оптимального управления $L^{\delta}(u,\lambda^k,\mu^k) \to \min$, $u\in\mathcal{D}$ для записи необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для управления $u^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$ . По этой причине следствием теоремы 2 является

Т е о р е м а 3. *Для существования МПР в задаче* $(P^0)$ *, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность двойственных переменных* $(\lambda^k,\mu^k)\in L_q(X)\times L^+{}_q(X)$, $k=1,2,\ldots$ *такая, что* $\delta^k\left\|(\lambda^k,\mu^k)\right\|\to 0$ *при* $\delta^k\to 0$ *и выполнялись соотношения* (4) *и* (5) *для элементов, удовлетворяющих соотношению максимума*

$$H\Big(x,t,u^{\delta}[\lambda^k,\mu^k](x,t),\eta^{\delta^k}\big[u^{\delta}[\lambda^k,\mu^k]\big](x,t)\Big) = \max_{u\in U} H\Big(x,t,u,\eta^{\delta^k}\big[u^{\delta}[\lambda^k,\mu^k]\big](x,t)\Big)\ \textit{п.в. на}\ Q_T,$$

*где* $H(u,\eta) \equiv -\big(u\eta + ||u||^{\gamma}_{p,Q_T}\big)$ *, а* $\eta^{\delta^k}\big[u^{\delta}[\lambda^k,\mu^k]\big]$ *— решение сопряженной задачи*

$$\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}\big(a_{i,j}(x,t)\eta_{x_i}\big) + a^{\delta^k}(x,t)\eta =$$

$$= 2A^{\delta^k}_{0,1}(x,t)z^{\delta^k}\big[u^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\big](x,t) + \lambda^k(x,t)\varphi^{\delta^k}_1(x,t) + \mu^k(x,t)\nabla_z\varphi^{\delta^k}_2\Big(x,t,z^{\delta^k}\big[u^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\big](x,t)\Big),$$

$$\eta(x,T) = 2A^{\delta^k}_{0,2}(x,T)z^{\delta^k}\big[u^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\big](x,T),\ \ x\in\Omega,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\mathcal{N}} + \sigma^{\delta^k}(x,t)\eta = 2A^{\delta^k}_{0,3}(s,t)z^{\delta^k}\big[u^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\big](s,t),\ \ (s,t)\in S_T.$$

*Последовательность* $u^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k], k = 1,2,\ldots$ *является искомым МПР и элементы* $u^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$ *сильно сходятся при* $k\to\infty$ *к* $u^0$ *. В качестве последовательности* $(\lambda^k,\mu^k)$, $k = 1,2,\ldots$ *может быть взята последовательность, генерируемая методом двойственной регуляризации теоремы 1. Как следствие соотношений* (4) *,* (5) *выполняется и соотношение*

$$V^0(\lambda^k,\mu^k) \to \sup_{(\lambda,\mu)\in L_q(X)\times L^+{}_q(X)} V^0(\lambda,\mu),\ \ k\to\infty.$$

*Одновременно, каждая слабая предельная точка последовательности* $(\lambda^k,\mu^k)$, $k = 1,2,\ldots$ *является решением двойственной задачи* $V^0(\lambda,\mu)\to\sup$ *,* $(\lambda,\mu)\in L_q(X)\times L^+{}_q(X)$ *.*

ЛИТЕРАТУРА


1. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: в 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011.

2. *Сумин М.И.* Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2014. Т. 54. № 1. С. 25–49.

3. *Сумин М.И.* Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1594–1615.

4. *Sumin M.I.* On the Stable Sequential Kuhn–Tucker Theorem and its Applications // Applied Mathematics. 2012. V. 3. No. 10A (Special issue «Optimization»). P. 1334–1350.

5. *Сумин М.И.* Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2007. Т. 47. № 4. С. 602–625.

6. *Сумин М.И.* Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов: учебное пособие. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2009.

7. *Сумин М.И.* Параметрическая двойственная регуляризация для задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2009. Т. 49. № 12. С. 2083–2102.

8. *Сумин М.И.* Устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управлении с фазовыми ограничениями // Труды 12 Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014, 16-19 июня 2014 г.). 2014. М.: Изд-во ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, С. 796–808.

9. *Сумин М.И.* Параметрическая двойственная регуляризация и принцип максимума в задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 4. С. 807–809.

10. *Сумин М.И.* Субдифференцируемость функций значений и регуляризация принципа максимума Понтрягина в оптимальном управлении распределенными системами // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5.

11. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

12. *Горшков А.А.* О двойственной регуляризации в задаче выпуклого программирования в равномерно выпуклом пространстве // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. № 3 (1). С. 172–180.

13. *Горшков А.А.* Об устойчивой секвенциальной теореме Куна-Таккера в выпуклом программировании в равномерно выпуклом пространстве и ее приложении // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 5. С. 2487–2489.

14. *Горшков А.А., Сумин М.И.* Устойчивый принцип Лагранжа в секвенциальной форме для задачи выпуклого программирования в равномерно выпуклом пространстве и его приложения // Известия вузов. Математика. 2015. № 1. С. 14–28.

15. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

16. *Casas E., Raymond J.-P., Zidani H.* Pontryagin's Principle for Local Solutions of Control Problems with Mixed Control-State Constraints // SIAM J. Control Optim. 2000. V. 39. № 4. P. 1182-1203.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом в рамках соглашения от 27 августа 2013 г. №02.B.49.21.0003 между Министерством образования и науки РФ и Нижегородским государственным университетом им. Н.И. Лобачевского.

Поступила в редакцию 9 июня 2015 г.

Gorshkov A.A. REGULARIZED PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE IN OPTIMAL CONTROL FOR A PARABOLIC EQUATION WITH PHASE CONSTRAINTS IN LEBESGUE SPACES

The stable with respect to the errors in the initial data sequential Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in a optimal control problem are considered. The target functional for this problem isstrictly uniformly convex, the control is distributed, the phase constraints are pointwised for a parabolic equation. The control is set from Lebesgue space of summable functions with $p \in (2, +\infty)$ degree. The restriction operators images are put to the Lebesgue space of summable functions with $s \in (1, 2)$ degree.

*Key words*: optimal control; parabolic equation; dual regularization; stability; point-wise phase constraint; Lebesgue space; Lagrange's principle; Pontryagin's maximum principle.

Горшков Андрей Александрович, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, аспирант, e-mail: tiger-nn@mail.ru

Gorshkov Andrey Aleksandrovich, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, the Russian Federation, Post-graduate Student, e-mail: tiger-nn@mail.ru

УДК 517.977

# ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

© **И.В. Гребенникова, А.Г. Кремлев**

*Ключевые слова*: сингулярно возмущенная система с запаздыванием; оптимальное управление; фундаментальная матрица.

Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием при интегральных квадратичных ограничениях на ресурсы управления. Предлагается процедура построения управляющего воздействия, аппроксимирующего оптимальное решение с заданной степенью точности относительно малого положительного параметра.

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_1(t)x(t-h) + B_1(t,\mu)u(t), \\ \mu dy(t)/dt &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_2(t)x(t-h) + B_2(t,\mu)u(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$; $x \in R^n$, $y \in R^m$; $u \in R^r$ — управление. Начальное состояние системы (1) $x(t) = \psi(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ точно неизвестно и заданы лишь