УДК 517.988.38
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1990-1997

ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ ШТРАФА ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

© **С. Е. Жуковский** [1]**, О. В. Филиппова** [2]

[1] Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
[2] Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: philippova.olga@rambler.ru

Рассмотрена задача условной минимизации функционала, определенного на метрическом пространстве, с ограничениями типа равенств. Получены условия совпадения решений задачи с точками минимума штрафной функции. Исследованы свойства функции минимума.
Ключевые слова: штрафная функция; накрывающее отображение; точка совпадения

Введение. Настоящая работа посвящена одному из методов исследования задач условной минимизации – методу штрафных функций. Подробное описание метода штрафных функций и его применение для выведения необходимых условий оптимальности дано, например, в [1], §15. Вообще говоря, снятие ограничений в задаче на условный экстремум построением штрафных функций является стандартным приемом теории экстремальных задач. Существует обширная литература по этой тематике (см. библиографию в [1], §15). Мы дополнительно отметим работы [2], [3], в которых был получен ряд модификаций метода штрафных функций, применимых к вырожденным экстремальным задачам.

Настоящая работа посвящена следующей задаче. Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) – метрические пространства, заданы отображения $\Psi,\Phi: X\to Y$, функция $f: X\to\mathbb{R}$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} f(x)\to\min, \\ \Psi(x)=\Phi(x). \end{cases} \tag{1}$$

Точку $x\in X$ в этой задаче будем называть допустимой, если $\Psi(x)=\Phi(x)$. Решением (минимумом) этой задачи будем называть допустимую точку $\widehat{x}\in X$ такую, что $f(\widehat{x})\le f(x)$ для любой допустимой точки $x\in X$.

Зададим штрафную функцию $f_k: X\to\mathbb{R}$, $k\ge 0$, по формуле

$$f_k(x)=f(x)+k\rho_Y(\Psi(x),\Phi(x)),\quad x\in X.$$

Цель настоящей работы заключается в нахождении условий, при которых при достаточно больших k множество решений задачи (1) совпадает с множеством точек минимума функций f_k.

I. Основные результаты. Пусть заданы числа $\alpha>0$, $\beta\ge 0$, $l\ge 0$. Всюду далее мы будем предполагать, что

- f является l-липшицевой функцией;
- Ψ является непрерывным и α-накрывающим отображением;
- Φ является β-липшицевым отображением;
- $\alpha > \beta$;
- X полно.

Напомним, что отображение Ψ называется α-накрывающим, если

$$\forall\, x_0 \in X, \quad \forall\, y \in Y \quad \exists\, x \in X: \quad \Psi(x) = y \quad \text{и} \quad \rho_X(x_0, x) \leq \frac{\rho_Y(\Psi(x_0), y)}{\alpha}.$$

Отображение Φ, как обычно, называем β-липшицевым, если

$$\rho_Y(\Phi(x), \Phi(u)) \leq \beta \rho_X(x, u) \quad \forall\, x, u \in X.$$

Отметим, что множество решений $x \in X$ уравнения

$$\Psi(x) = \Phi(x)$$

(т. е. множество допустимых точек в задаче (1)), также принято называть множеством точек совпадения отображений Ψ и Φ. В приведенных предположениях множество допустимых точек в задаче (1) непусто, поскольку в силу теоремы 1 из [4] множество точек совпадения отображений Ψ и Φ непусто.

Отметим, что результаты, аналогичные теореме 1 из [4], широко используются для изучения вопроса разрешимости абстрактных уравнений и включений (см., например, [5]–[7]), обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [8], [9]), уравнений Вольтерра (см. [10]) и управляемых систем (см., например, [11]–[13]). Теория накрывающих отображений используется и применительно к экстремальным задачам (см., например, [14]).

Сформулируем основные результаты настоящей работы.

Т е о р е м а 1. *Если*

$$k > l(\alpha - \beta)^{-1},$$

то множество всех решений задачи (1) и множество всех точек минимума функции f_k *совпадают.*

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из теоремы о точках совпадения из [4] и приведенного в следующем параграфе утверждения, аналогичного предложению 3.111 из [15].

Приведем следствие теоремы 1. Для произвольного $y \in Y$ рассмотрим задачу

$$\begin{cases} f(x) \to \min, \\ \Psi(x) = y. \end{cases} \tag{2}$$

С л е д с т в и е 1. *Если* $k > l\alpha^{-1}$, *то множество решений задачи (2) совпадает со множеством точек минимума функции*

$$g_k : X \to \mathbb{R}, \quad g_k(x) \equiv f(x) + k\rho_Y(\Psi(x), y).$$

Для доказательства этого утверждения достаточно применить теорему 1 к задаче (2) при $\Phi(x) \equiv y$, $\beta = 0$.

Исследуем зависимость значения минимума в задаче (2) от параметра $y \in Y$. Положим

$$\Psi^{-1}(y) := \{x \in X : y = \Psi(x)\} \quad \forall y \in Y.$$

Обозначим через $\mathcal{D} \subset Y$ множество всех $y \in Y$, для которых инфимум в задаче (2) конечен, т. е.

$$y \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \quad f(x) \geq c \quad \forall x \in \Psi^{-1}(y).$$

Определим функцию $\omega : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\omega(y) := \inf_{x:\, \Psi(x)=y} f(x) \quad \forall y \in \mathcal{D}.$$

Т е о р е м а 2. *Если $\mathcal{D} \neq \emptyset$, то $\mathcal{D} = Y$ и функция ω является $(\alpha^{-1}l)$-липшицевой.*

Завершая этот параграф, сформулируем достаточные условия существования минимума функции, определенной на метрическом пространстве. Пусть даны функция $u : X \to \mathbb{R}$ и положительное число α.

Т е о р е м а 3. *Предположим, что*
1) функция $u(\cdot)$ является условно α-накрывающей, т. е.

$$\forall x_0 \in X, \quad \forall y \in u(X) \quad \exists x \in X : \quad u(x) = y \quad \text{и} \quad \rho_X(x_0, x) \leq \frac{|y - u(x_0)|}{\alpha};$$

2) функция $u(\cdot)$ является полунепрерывной снизу;
3) существует $\gamma \in \mathbb{R}$ такое, что $u(x) \geq \gamma$ для любого $x \in X$.

Тогда для любой точки $x_0 \in X$ существует точка $x^* \in X$, в которой достигается минимум функции $u(\cdot)$, удовлетворяющая соотношению

$$\rho_X(x_0, x^*) \leq \frac{u(x_0) - \gamma}{\alpha}.$$

Это утверждение представляет собой следствие теоремы 3 из [16].

II. Доказательства основных результатов. Для произвольной функции $F : X \to \mathbb{R}_+$ и числа $a \in \mathbb{R}$, как обычно, обозначим

$$F^{-1}(a) = \{x \in X : F(x) = a\}.$$

Для множества $A \subset X$ и точки $x \in X$ обозначим

$$\mathrm{dist}(x, A) := \inf\{\rho_X(x, a) : a \in A\}.$$

Всюду далее будем полагать, что

$$\rho_X(x, \emptyset) = +\infty \quad \forall x \in X, \quad +\infty > t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Пусть задана функция $F : X \to \mathbb{R}_+$, число $\gamma \geq 0$. Для произвольного $k \geq 0$ определим функцию $f_k : X \to \mathbb{R}_+$ по формуле

$$f_k(x) := f(x) + kF(x), \quad x \in X.$$

Л е м м а 1. *Предположим, что*

$$\mathrm{dist}(x, F^{-1}(0)) \leq \gamma F(x) \quad \forall x \in X.$$

1) Если $k=\gamma l$, то любое решение задачи

$$f(x)\to\min,\quad F(x)=0 \tag{3}$$

является точкой минимума функции f_k.
2) Если $k>\gamma l$, то множество решений задачи (3) совпадает со множество точек минимума функции f_k.

Доказательство **леммы 1**. Пусть $k\ge\gamma l$, $\widehat{x}$ – решение задачи (3). Из предположений на функцию F следует, что для любой точки x для любого $\varepsilon>0$ существует точка $x_\varepsilon\in F^{-1}(0)$ такая, что $\rho_X(x,x_\varepsilon)\le\gamma F(x)+\varepsilon$. Следовательно,

$$f_k(x)\ge -l\rho_X(x,x_\varepsilon)+f(x_\varepsilon)+\frac{k}{\gamma}\rho_X(x,x_\varepsilon)-k\varepsilon\ge f(x_\varepsilon)-k\varepsilon\ge f_k(\widehat{x})-k\varepsilon$$

для любого $\varepsilon>0$. Поэтому $f_k(x)\ge f(\widehat{x})$ для любого x, и, значит, $\widehat{x}$ является точкой минимума функции f_k.

Пусть $k>\gamma l$, $\widehat{x}$ – точка минимума функции f_k. Из предположений на функцию F следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует точка $x_\varepsilon\in F^{-1}(0)$ такая, что $\rho_X(x,x_\varepsilon)\le\gamma F(\widehat{x})+\varepsilon$. Тогда

$$f(x_\varepsilon)=f_k(x_\varepsilon)\ge f_k(\widehat{x})\ge -l\rho_X(\widehat{x},x_\varepsilon)+f(x_\varepsilon)+\frac{k}{\gamma}\rho_X(\widehat{x},x_\varepsilon)+k\varepsilon,$$

и, значит,

$$\frac{k-l\gamma}{\gamma}\rho_X(\widehat{x},x_\varepsilon)+k\varepsilon\le 0$$

для любого $\varepsilon>0$. Следовательно, $\widehat{x}\in F^{-1}(0)$, т. е. $\widehat{x}$ является допустимой точкой в задаче (3). Отсюда очевидно следует, что $\widehat{x}$ – решение задачи (3). □

Замечание. Если $k=\gamma l$, то множество решений задачи (3) может не совпадать со множеством точек минимума функции f_k. Так, например, если

$$X=\mathbb{R},\quad f(x)\equiv -|x|,\quad F(x)\equiv |x|,$$

то $l=\gamma=1$, задача (3) принимает вид

$$\begin{cases} -|x|\to\min,\\ |x|=0,\end{cases}$$

и имеет место равенство

$$f_k(x)\equiv -|x|+k|x|.$$

Множество решений задачи (3) состоит только из нуля, в то время, как $f_k(x)\equiv 0$ при $k=\gamma l=1$, и, значит, множество точек минимума функции f_k совпадает с $\mathbb{R}$.

Доказательство **теоремы 1.** Положим

$$F(x)=\rho_Y(\Psi(x),\Phi(x)),\quad x\in X,\quad \gamma:=\frac{1}{\alpha-\beta}.$$

Согласно теореме о точках совпадения (теорема 1 из [4]) для любого $x\in X$ существует точка $\xi\in X$ такая, что

$$F(\xi)=0\quad\text{и}\quad \rho_X(x,\xi)\le\gamma F(x).$$

Следовательно, $\operatorname{dist}(x,F^{-1}(0))\le\gamma F(x)$ для любого $x\in X$. Поскольку во введенных обозначениях задачи (1) и (3) эквивалентны, из леммы 1 вытекает искомое утверждение. □

Доказательство **теоремы 2.** Пусть $\mathcal{D} \neq \emptyset$, т. е. существует точка $y^* \in Y$ такая, что множество

$$\{f(x) : \Psi(x) = y^*\}$$

ограничено снизу. По определению его точная нижняя граница совпадает с $\omega(y^*)$. Возьмем произвольную точку $y \in Y$ и покажем, что $y \in \mathcal{D}$, т. е., что множество

$$\{f(x) : \Psi(x) = y\}$$

ограничено снизу.

Из α-накрываемости отображения Ψ следует, что для произвольной точки $x \in X$ такой, что $\Psi(x) = y$ существует точка $x^* \in X$, для которой

$$\Psi(x^*) = y^* \quad \text{и} \quad \rho_X(x, x^*) \leq \frac{1}{\alpha}\rho_Y(y, y^*).$$

Следовательно,

$$f(x) \geq f(x^*) - l\rho_X(x, x^*) \geq \omega(y^*) - \frac{l}{\alpha}\rho_Y(y, y^*)$$

для любой точки $x \in X$ такой, что $\Psi(x) = y$. Значит множество $\{f(x) : \Psi(x) = y\}$ ограничено снизу. Следовательно $y \in \mathcal{D}$. В силу произвольности выбора $y \in Y$ получаем $\mathcal{D} = Y$.

Покажем, что функция ω является $(\alpha^{-1}l)$-липшицевой. Возьмем произвольные точки $y_1, y_2 \in Y$, произвольное положительное число ε, точку $x_1 \in \Psi^{-1}(y_1)$ такую, что $f(x_1) < \omega(y_1) + \varepsilon$. Из α-накрываемости отображения Ψ следует, что существует точка $x_2 \in \Psi^{-1}(y_2)$, для которой

$$\rho_X(x_1, x_2) \leq \frac{1}{\alpha}\rho_Y(y_1, y_2).$$

Следовательно,

$$\omega(y_2) - \omega(y_1) \leq f(x_2) - (f(x_1) - \varepsilon) \leq l\rho_X(x_1, x_2) + \varepsilon \leq \frac{l}{\alpha}\rho_Y(y_1, y_2) + \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\omega(y_2) - \omega(y_1) \leq \rho_Y(y_1, y_2).$$

В силу произвольности выбора $y_1, y_2 \in Y$ из последнего неравенства следует, функция ω является $(\alpha^{-1}l)$-липшицевой. $\square$

Доказательство **теоремы 3.** В силу предположения 3) существует точная нижняя граница $\widetilde{\gamma} \geq \gamma$ множества значений функции $u(\cdot)$. Обозначим

$$U(x) := u(x) - \widetilde{\gamma}.$$

Очевидно, что точная нижняя граница множества значений функции $U(\cdot)$ равна нулю.

Покажем, что функция $U(\cdot)$ удовлетворяет условию Каристи (см. [16]) с константой α. Действительно, пусть $x \in X$, $U(x) \neq 0$. Тогда $u(x) > \widetilde{\gamma}$. Следовательно, по определению точной нижней границы существует значение $y \in u(X)$ такое, что

$$u(x) > y \geq \widetilde{\gamma}.$$

В силу предположения 1) существует точка $x' \in X$ такая, что

$$u(x') = y \quad \text{и} \quad \rho_X(x, x') \leq \frac{|u(x') - u(x)|}{\alpha}$$

Следовательно,

$$U(x') + \alpha\rho_X(x, x') \leq U(x') + |u(x') - u(x)| \leq$$

$$\leq U(x') + u(x) - u(x') = u(x') - \widetilde{\gamma} + u(x) - u(x') = U(x).$$

Итак, доказано, что функция $U(\cdot)$ удовлетворяет условию Каристи.

Из предположения 2) и теоремы 3 из [16] следует, что существует точка минимума $x^* \in X$ функция $U(\cdot)$, для которой имеет место неравенство

$$\rho_X(x_0, x^*) \leq \frac{U(x_0)}{\alpha} = \frac{u(x_0) - \widetilde{\gamma}}{\alpha} \leq \frac{u(x_0) - \gamma}{\alpha}.$$

Из определения функции $U(\cdot)$ следует, что найденная точка x^* является точкой минимума функции $u(\cdot)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

2. *Avakov E.R., Arutyunov A.V., Izmailov A.F.* Exact penalties for optimization problems with 2-regular equality constraints // Comp Math. and Math. Phys. 2008. V. 48. Iss. 3. P. 346–353.

3. *Avakov E.R., Arutyunov A.V., Izmailov A.F.* On convergence rate estimates for power penalty methods // Comp Math. and Math. Phys. 2004. V. 44. Iss. 10. P. 1684–1695.

4. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // ДАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.

5. *Uderzo A.* A metric version of Milyutin theorem // Set-Valued Var. Anal. 2012. V. 20. Iss. 2. P. 279–306.

6. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Appl. 2009. V. 5. № 1. P. 105–127.

7. *Арутюнов А.В.* Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Математические заметки. 2009. Т. 86. № 2. Р. 163–169.

8. *Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

9. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.

10. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Anal. 2012. V. 75. № 3. P. 1026–1044.

11. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E.* Existence of local solutions in constrained dynamic systems // Applicable Analysis 2011. V. 90. Iss. 6. P. 889–898.

12. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения 2010. Т. 46. № 11. С. 1561–1570.

13. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* К вопросу о разрешимости управляемых дифференциальных систем // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 1. С. 49–54.

14. *Mordukhovich B.S.* Variational Analysis and Generalized Differentiation. I: Basic Theory. Springer-Verlag. Berlin, 2006.

15. *Bonnans J.F., Shapiro A.*, Perturbation analysis of optimization problems // Springer. N.Y., 2000.

16. *Арутюнов А.В.* Условие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения // Труды МИАН. 2015. Т. 291. С. 30–44.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 15-01-04601, 16-31-50040) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ, № НШ-8215.2016.1.

Поступила в редакцию 10 октября 2016 г.

Жуковский Сергей Евгеньевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Филиппова Ольга Викторовна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

UDC 517.988.38
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1990-1997

EXACT PENALTY CONSTANTS FOR EXTREMAL PROBLEMS IN METRIC SPACES

© **S. E. Zhukovskiy [1], O. V. Filippova [2]**

[1] The Peoples' Friendship University of Russia
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
[2] Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov, Russian Federation, 392000
The Peoples' Friendship University of Russia
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: philippova.olga@rambler.ru

A constrained optimization problem in metric spaces is considered. Conditions for the set of solutions to coincide with the set of minimum points of a penalized function are obtained. Some properties of minimum functions are studied.
Key words: penalty function; covering mapping; coincidence point

REFERENCES

1. *Vasil'ev F.P.* Metody optimizacii. M.: Faktorial Press, 2002.
2. *Avakov E.R., Arutyunov A.V., Izmailov A.F.* Exact penalties for optimization problems with 2-regular equality constraints // Comp Math. and Math. Phys. 2008. V. 48. Iss. 3. P. 346–353.
3. *Avakov E.R., Arutyunov A.V., Izmailov A.F.* On convergence rate estimates for power penalty methods // Comp Math. and Math. Phys. 2004. V. 44. Iss. 10. P. 1684–1695.
4. *Arutyunov A.V.* Nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskih prostranstvah i nepodvizhnye tochki // DAN. 2007. T. 416. № 2. S. 151–155.
5. *Uderzo A.* A metric version of Milyutin theorem // Set-Valued Var. Anal. 2012. V. 20. Iss. 2. P. 279–306.
6. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Appl. 2009. V. 5. № 1. P. 105–127.
7. *Arutyunov A.V.* Ustojchivost' tochek sovpadeniya i svojstva nakryvayushchih otobrazhenij // Matematicheskie zametki. 2009. T. 86. № 2. P. 163–169.
8. *Arutyunov A.V., Avakov E.R., Zhukovskiy E.S.* Nakryvayushchie otobrazheniya i ih prilozheniya k differencial'nym uravneniyam, ne razreshennym otnositel'no proizvodnoj // Differencial'nie uravneniya. 2009. T. 45. № 5. S. 613–634.
9. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* O korrektnosti differencial'nyh uravnenij, ne razreshennyh otnositel'no proizvodnoj // Differencial'nie uravneniya. 2011. T. 47. № 11. S. 1523–1537.

10 . *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Anal. 2012. V. 75. № 3. P. 1026–1044.
11 . *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E.* Existence of local solutions in constrained dynamic systems // Applicable Analysis. 2011. V. 90. Iss. 6. P. 889–898.
12 . *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E.* Lokal'naya razreshimost' upravlyaemyh sistem so smeshannymi ogranicheniyami // Differencial'nie uravneniya. 2010. T. 46. № 11. S. 1561–1570.
13 . *Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A.* K voprosu o razreshimosti upravlyaemyh differencial'nyh sistem // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences, 2013. T. 18. Vyp. 1. S. 49–54.
14 . *Mordukhovich B.S.* Variational Analysis and Generalized Differentiation. I: Basic Theory. Springer-Verlag. Berlin, 2006.
15 . *Bonnans J.F., Shapiro A.*, Perturbation analysis of optimization problems // Springer. N.Y., 2000.
16 . *Arutyunov A.V.* Uslovie Karisti i sushchestvovanie minimuma ogranichennoj snizu funkcii v metricheskom prostranstve. Prilozheniya k teorii tochek sovpadeniya // Trudy MIAN. 2015. T. 291. S. 30–44.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects №№ 15-01-04601, 16-31-50040) and by the grant of the Russian Federation President for the state support of leading scientific schools № NSh-8215.2016.1.

Received 10 October 2016

Zhukovskiy Sergey Evgen'evich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Filippova Olga Viktorovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavina, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

Информация для цитирования:

Жуковский С.Е., Филиппова О.В. Точные константы штрафа для экстремальных задач в метрических пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 1990-1997. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1990-1997

Zhukovskiy S.E., Filippova O.V. Tochnye konstanty shtrafa dlya ekstremal'nyh zadach v metricheskih prostranstvah [Exact penalty constants for extremal problems in metric spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 1990-1997. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1990-1997 (In Russian)