УДК 62-50; 519.7; 519.8
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-131-141

# ПРОИЗВОДНЫЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

© В.И. Левин

Рассмотрены задачи, связанные с вычислением производных от интервально-определенных функций. Эти задачи актуальны при изучении систем с той или иной степенью неопределенности (недетерминированные системы). Конкретно здесь речь идет о простейших системах, описываемых элементарными интервально-определенными функциями. Соответственно этому решаются задачи нахождения производных от элементарных интервально-определенных функций. При этом используются полученные ранее формулы и приемы вычисления производных от любых интервально-определенных функций.
Приведены основные определения, связанные с производными от интервально-определенных функций, а также формулы двух типов, которые позволяют вычислять указанные интервальные производные. Формулы первого типа выражают производные в закрытой интервальной форме, которая требует использования аппарата интервальной математики. Формулы второго типа выражают производные в открытой интервальной форме, в виде двух формул, первая из которых дает нижнюю границу интервала, представляющего производную, а вторая – верхнюю границу, и вычисление производной от интервально-определенной функции в конечном итоге сводится к вычислению двух обычных функций.
С помощью изложенного математического аппарата были найдены производные от всех элементарных интервальных функций, а именно: интервальной константы, интервальной степенной функции, интервальной показательной функции, интервальной экспоненциальной функции, интервальной логарифмической функции, интервальной натурально-логарифмической функции, интервальных тригонометрических функций (синуса, косинуса, тангенса и котангенса), интервальных обратных тригонометрических функций (арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса). Формулы всех производных представлены в открытой интервальной форме. Показано отличие интервальных производных интервальных элементарных функций от классических производных соответствующих обычных (неинтервальных) элементарных функций.
*Ключевые слова*: интервал; интервальная функция; интервальная производная; интервальные вычисления; интервально-дифференциальное исчисление.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Проектирование и анализ свойств разнообразных систем требует соответствующего, адекватного рассматриваемой задаче математического аппарата. Если изучаемая система полностью определенная (детерминированная), то решаемая задача и, соответственно, используемый для ее решения математический аппарат обычно достаточно просты. К сожалению, встречающиеся на практике системы обычно характеризуются той или иной степенью неопределенности (недетерминированы). Для исследования и построения таких систем применяют более сложный специализированный математический аппарат – теорию вероятностей, нечеткие множества, интервальную математику [1–3].

Так, в работах [4–5] автором был предложен новый математический аппарат для проектирования и исследования недетерминированных систем – недетерминистское (интервальное) дифференциальное исчисление. Этот аппарат является аналогом классического дифференциального исчисления Ньютона–Лейбница [6]. Он позволяет переносить основные идеи классического дифференциального исчисления на неполностью определенные функции, задаваемые с точностью до интервалов возможных значений переменных. Однако, несмотря на сходство основных исходных идей двух исчислений, предложенное интервальное дифференциальное исчисление по форме совсем не похоже на классическое дифференциальное исчисление Ньютона–Лейбница, что является следствием неопределенности интервальных функций, фигурирующих в интервальной математике. Кроме того, предложенное интервальное дифференциальное исчисление, по нашему мнению, более адекватно реальным природным объектам и процессам, чем классическое дифференциальное исчисление [подробнее см. [7]).

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как известно из классического дифференциального исчисления [6], нахождение производной от любой функции базируется на 1) представлении этой функции в виде соответствующей суперпозиции так называемых элементарных функций; 2) переходе в полученном представлении от функций к их производным, с использованием основных теорем дифференциального исчисления (производная суммы функций, производная произведения функций и т. д.); 3) подстановке вместо производных элементарных функций их выражений, полученных заранее. Для осуществления этой процедуры составляют таблицы производных элементарных функций.

Сходная описанной процедура может быть полезна и при нахождении производных от интервальных функций, рассматриваемых в интервальном дифференциальном исчислении. Конечно, при этом необходимо учитывать большое отличие свойств и форм представления обычных и интервальных функций и производных от них. В соответствии с этим нашими задачами в данной статье является: 1) составление полного набора производных от всех интервальных элементарных функций; 2) выявление различий производных от интервальных элементарных функций и производных от детерминированных элементарных функций.

## 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

Базовое для данной статьи понятие интервальной функции [4–5; 7] вводится как однозначное отображение множества $\{\tilde{x}\}$ замкнутых вещественных интервалов $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ на множество $\{\tilde{y}\}$ замкнутых вещественных интервалов $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ того же вида. Символически интервальная функция записывается в виде

$$\tilde{y}=f(\tilde{x}) \text{ или } \tilde{y}=[y_1,y_2]=[f_1(\tilde{x}),f_2(\tilde{x})], \qquad (1)$$

где $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная; $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная; $\tilde{f}=[f_1,f_2]$ – интервальная функция, с ее нижней $f_1$ и верхней $f_2$ граничными функциями. Второе базовое понятие, используемое далее, – понятие предела интервальной функции.

Независимая интервальная переменная $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ интервальной функции (1) по определению неограниченно приближается к некоторому интервалу (пределу) $\tilde{x}^\circ=[x_1^\circ,x_2^\circ]$, если в процессе этого изменения $x_1$ неограниченно приближается к $x_1^\circ$, а $x_2$ – к $x_2^\circ$. Символическая запись:

$$\tilde{x}\to\tilde{x}^\circ\equiv(x_1\to x_1^\circ, x_2\to x_2^\circ). \qquad (2)$$

Аналогично определяется неограниченное приближение зависимой интервальной переменной $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ интервальной функции (1) к интервалу (пределу) $\tilde{y}^\circ=[y_1^\circ,y_2^\circ]$:

$$\tilde{y}\to\tilde{y}^\circ\equiv(y_1\to y_1^\circ, y_2\to y_2^\circ). \qquad (3)$$

Если независимая интервальная переменная $\tilde{x}$ своим неограниченным приближением к интервалу-пределу $\tilde{x}^\circ$ вызывает неограниченное приближение зависимой интервальной переменной $\tilde{y}$ к интервалу-пределу $\tilde{y}^\circ$, говорим, что предел интервальной функции (1) при $\tilde{x}$, стремящемся к $\tilde{x}^\circ$, равен $\tilde{y}^\circ$, или символически

$$\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}^\circ}\tilde{y}=\tilde{y}^\circ \text{ или } \lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}^\circ}\tilde{f}(\tilde{x})=\tilde{y}^\circ. \qquad (4)$$

В случае если интервальная функция $\tilde{f}$ (1) непрерывна, т. е. ее нижняя $f_1$ и верхняя $f_2$ граничные функции являются непрерывными функциями нижней $x_1$ и верхней $x_2$ границ независимой переменной $\tilde{x}=[x_1,x_2]$, то предел функции $\tilde{f}$ равен ее значению в предельной точке $\tilde{x}^\circ$ аргумента $\tilde{x}$, или символически

$$\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}^\circ}\tilde{f}(\tilde{x})=\tilde{f}(\tilde{x}^\circ). \qquad (5)$$

Основное для нас понятие интервальной производной вводится аналогично понятию обычной производной функции [6]. Рассмотрим произвольную интервальную функцию $\tilde{f}$ (1). Будем считать ее непрерывной. Зафиксируем значение независимой переменной $\tilde{x}=\tilde{x}^\circ=[x_1^\circ,x_2^\circ]$. Этому значению, в силу непрерывности функции, соответствует некоторое фиксированное значение самой функции $\tilde{y}^\circ=\tilde{f}(\tilde{x}^\circ)$. Определим приращение независимой и зависимой переменных функции относительно этих фиксированных значений

$$\Delta\tilde{x}=\tilde{x}-\tilde{x}^\circ,\quad \Delta\tilde{y}=\tilde{y}-\tilde{y}^\circ=\tilde{f}(\tilde{x})-\tilde{f}(\tilde{x}^\circ) \qquad (6)$$

и составим отношение второго приращения к первому

$$\Delta\tilde{y}/\Delta\tilde{x}=(\tilde{y}-\tilde{y}^\circ)/(\tilde{x}-\tilde{x}^\circ)=(\tilde{f}(\tilde{x})-\tilde{f}(\tilde{x}^\circ))/(\tilde{x}-\tilde{x}^\circ). \qquad (7)$$

Предел отношения (7) при неограниченном приближении независимой переменной $\tilde{x}$ к ее фиксированному предельному значению $\tilde{x}^\circ$, если он существует, называется интервальной производной функцией от исходной интервальной функции $\tilde{f}(\tilde{x})$ (1) в точке $\tilde{x}^\circ$ и обозначается как $\tilde{y}'_{\tilde{x}^\circ}$ или $\tilde{f}'_{\tilde{x}^\circ}(\tilde{x})$. Таким образом,

$$\tilde{y}'_{\tilde{x}^\circ}\equiv\tilde{f}'_{\tilde{x}^\circ}(\tilde{x})=\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}^\circ}\Delta\tilde{y}/\Delta\tilde{x}, \quad \text{где } \Delta\tilde{x},\Delta\tilde{y} \text{ из (6)}. \qquad (8)$$

Доказано [4–5; 7], что для существования у непрерывной интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x})$ в точке $\tilde{x}^\circ$ интервальной производной необходимо и достаточно, чтобы в этой точке и некоторой ее окрестности независимая $\tilde{x}$ и зависимая $\tilde{y}$ переменные были существенно интервальными, а именно, не вырождались в точку.

Как и в случае обычной производной, понятие интервальной производной можно обобщить путем повторного выполнения операции взятия производной.

При этом из интервальной производной 1-го порядка $\tilde{y}'_{\tilde{x}}$ получается интервальная производная 2-го порядка $\tilde{y}''_{\tilde{x}}$, из последней – интервальная производная 3-го порядка $\tilde{y}'''_{\tilde{x}}$ и т. д. Согласно введенным определениям интервальной производной любого порядка, все интервальные производные, в т. ч. как и исходная интервальная функция, при любом численном значении аргумента $\tilde{x}$ в виде интервала возможных значений

$\tilde{x}=[x_1,x_2]$ также принимают численные значения в виде некоторого интервала значений. Поэтому вычисление интервальной функции и интервальной производной от нее любого порядка заключается в вычислении нижних и верхних граничных функций соответствующих интервальных функций. Вычисление функции $\tilde{f}$ выполняется по (1), задающей эту функцию в виде пары «нижняя $f_1$ и верхняя $f_2$ граничные функции». Вычисление производной любого $n$-го порядка $\tilde{y}_{\tilde{x}}^{(n)}=\tilde{f}_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})$ от интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x})$ выполняется с помощью формулы [7]

$$\tilde{y}_{\tilde{x}}^{(n)}=\tilde{f}_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})=[\tilde{f}_{1,\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x}),\tilde{f}_{2,,\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})], \tag{9}$$

где $\tilde{f}_{1,\tilde{x}}^{(n)}$ и $\tilde{f}_{2,\tilde{x}}^{(n)}$ – соответственно, нижняя и верхняя граничные функции интервальной производной $\tilde{f}_{\tilde{x}}^{(n)}$ $n$-го порядка от исходной интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x})$. Граничные функции в формуле (9) выражаются в таком виде

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{1,\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})&=-2^{n-1}(y_2-y_1)/(x_2-x_1)^n,\\ \tilde{f}_{2,\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})&=2^{n-1}(y_2-y_1)/(x_2-x_1)^n,\end{aligned} \tag{10}$$

здесь $x_1$, $x_2$ – нижняя и верхняя границы интервального аргумента $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ в точке взятия производной от функции $\tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x})$, $y_1$, $y_2$ – нижняя и верхняя границы интервальной зависимой переменной $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ этой функции в той же точке. Как следует из выражений (9), (10), интервальная производная любого порядка имеет вид интервала, симметричного относительно нуля. Это позволяет записать выражение интервальной производной любого $n$-го порядка (9), (10) в более простой форме

$$\tilde{y}_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})=\tilde{f}_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})=[-f_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x}),f_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})], \tag{11}$$

где

$$f_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})=2^{n-1}(y_2-y_1)/(x_2-x_1)^n, \tag{12}$$

а значения $x_1,x_2,y_1,y_2$ раскрыты в пояснениях к формуле (10).

Формулы (11), (12) позволяют находить интервальные производные любого порядка от любых интервальных функций. Так, они позволяют найти производные от элементарных интервальных функций.

## 4. ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

По определению любая элементарная интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x})$ вида (1) получается из соответствующей элементарной вещественной функции $y=f(x)$ путем раздетерминизации ее независимой переменной $x$, зависимой переменной $y$ и собственно функции $f$, т. е. преобразования в соответствующие интервальную независимую переменную $\tilde{x}=[x_1,x_2]$, интервальную зависимую переменную $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ и интервальную функцию $\tilde{f}=[f_1,f_2]$. Определение производных от элементарных интервальных функций начнем с простейшей интервальной функции – интервальной константы.

**Функция интервальная константа** выражается в виде

$$\tilde{y}\equiv\tilde{c}=[c_1,c_2],\quad c_1=\mathrm{const}\ ,\quad c_2=\mathrm{const}\ ,\quad c_1<c_2\ . \tag{13}$$

Сравнивая выражение (13) с общим выражением (1) любой интервальной функции, видим, что интервальная константа – это интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$\begin{aligned}y_1&=f_1(\tilde{x})=f_1(x_1,x_2)=c_1,\\ y_2&=f_2(\tilde{x})=f_2(x_1,x_2)=c_2.\end{aligned} \tag{14}$$

Подставив (14) в общие формулы интервальных производных (11), (12), мы получим выражение производной любого $n$-го порядка от интервальной константы $\tilde{y}=\tilde{c}$ в виде

$$\tilde{y}^{(n)}\equiv\tilde{c}^{(n)}=[c_1,c_2]=[-c_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x}),c_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})], \tag{15}$$

где

$$c_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})=2^{n-1}(c_2-c_1)/(x_2-x_1)^n\ .$$

Как хорошо видно из выражения (15), интервальная производная любого $n$-го порядка от функции – интервальной константы $\tilde{c}$ (13) не равна 0 – нулю (точнее, нулевому интервалу $\tilde{0}=[0,0]$), в отличие от классической производной от вещественной константы, равной 0. Более того, эта производная не является постоянной величиной, а существенно зависит от аргумента $\tilde{x}=[x_1,x_2]$. Согласно формуле (15), она существует во всех точках $\tilde{x}$, где $x_1\neq x_2$, и монотонно убывает при увеличении разности $x_2-x_1$.

**Интервальная степенная функция** выражается в виде

$$\tilde{y}=[y_1,y_2]=\tilde{x}^m\equiv[x_1,x_2]^m\ , \tag{16}$$

где $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Будем считать, исходя из физических соображений, что в пределах одной (любой!) решаемой задачи переменная величина $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ может быть только положительной (более общо – неотрицательной) или только отрицательной (более общо – неположительной), т. е. выполняется условие

$$x_1, x_2 \ge 0 \quad \text{или} \quad x_1, x_2 \le 0\,. \tag{17}$$

Тогда интервальную степенную функцию (16) можно записать в явном интервальном виде посредством следующей формулы:

$$\tilde y = [y_1, y_2] = \begin{cases} [x_1^m, x_2^m], & \text{при} \;\; x_1, x_2 \ge 0 \;\text{ или } x_1, x_2 \le 0, \; m \;\text{ нечетно;} \\ [x_2^m, x_1^m], & \text{при} \;\; x_1, x_2 \le 0\,, \; m \;\text{ четно.} \end{cases} \tag{18}$$

Сравнив выражение (18) с общим выражением любой интервальной функции (1), мы видим, что интервальная степенная функция есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют такой вид:

$$y_1 = f_1(\tilde x) = f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^m, & \text{при} \;\; x_1, x_2 \ge 0 \text{ или } x_1, x_2 \le 0, m \;\text{ нечетно;} \\ x_2^m, & \text{при} \;\; x_1, x_2 \le 0\,, \; m \;\text{ четно;} \end{cases} \tag{19}$$
$$y_2 = f_2(\tilde x) = f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2^m, & \text{при} \;\; x_1, x_2 \ge 0 \text{ или } x_1, x_2 \le 0, m \;\text{ нечетно;} \\ x_1^m, & \text{при} \;\; x_1, x_2 \le 0\,, \; m \;\text{ четно.} \end{cases}$$

Подставим выражения (19) в общие формулы интервальных производных (11), (12). В результате получим выражение производной любого $n$-го порядка от интервальной степенной функции $\tilde y = \tilde x^m$ (16)

$$\tilde y^{(n)} = (\tilde x^m)^{(n)} = ([x_1, x_2]^m)^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde x), f^{(n)}(\tilde x)]\,, \tag{20}$$

где

$$f^{(n)}(\tilde x) = \begin{cases} 2^{n-1}(x_2^m - x_1^m)/(x_2 - x_1)^n, & \text{при} \;\; x_1, x_2 \ge 0 \\ \text{или } x_1, x_2 \le 0, \; m \;\text{ нечетно;} & \\ 2^{n-1}(x_1^m - x_2^m)/(x_2 - x_1)^n, & \text{при} \;\; x_1, x_2 \le 0\,, \\ m \;\text{ четно.} & \end{cases}$$

Как хорошо видно из формулы (20), в интервальной производной любого $n$-го порядка $(\tilde x^m)^{(n)}$ от интервальной степенной функции $\tilde x^m$ (16) при увеличении $n$ показатель степени $m$ не уменьшается, приближаясь к нулю, в отличие от классической производной от вещественной степенной функции, у которой этот эффект существует. Интервальная производная $(\tilde x^m)^{(n)}$, согласно (20), существует во всех точках $\tilde x = [x_1, x_2]$, в которых $x_1 \ne x_2$; она монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

**Интервальная показательная функция** выражается в виде

$$\tilde y = [y_1, y_2] = a^{\tilde x} \equiv a^{[x_1, x_2]}, \quad a > 0\,, \tag{21}$$

где $\tilde x = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde y = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно общему определению интервальной функции [4–5; 7], интервальная функция $a^{\tilde x}$ определяется в следующем виде

$$a^{\tilde x} = \{a^x \mid x \in \tilde x\}\,, \tag{22}$$

где $a^x$ – исходная обычная показательная функция, которая монотонно возрастает. Это позволяет записать интервальную показательную функцию (21) в явном интервальном виде с помощью формулы

$$\tilde y \equiv [y_1, y_2] = [a^{x_1}, a^{x_2}], \quad a > 0\,. \tag{23}$$

Сравнив выражение (23) с общим выражением любой интервальной функции (1), устанавливаем, что интервальная показательная функция есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой принимают следующий вид:

$$y_1 = f_1(\tilde x) = f_1(x_1, x_2) = \operatorname{tg} x_1, \tag{24}$$
$$y_2 = f_2(\tilde x) = f_2(x_1, x_2) = \operatorname{tg} x_2$$

Подставив выражения (24) в общие формулы интервальных производных (11), (12), имеем выражение производной любого $n$-го порядка от интервальной показательной функции $\tilde y = a^{\tilde x}$ (21) в виде

$$\tilde y^{(n)} = (a^{\tilde x})^{(n)} = (a^{[x_1, x_2]})^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde x), f^{(n)}(\tilde x)]\,, \tag{25}$$

где

$$f^{(n)}(\tilde x) = 2^{n-1}(a^{x_2} - a^{x_1})/(x_2 - x_1)^n\,.$$

Выражение (25) показывает, что в интервальной производной любого $n$-го порядка $(a^{\tilde x})^{(n)}$ от интервальной показательной функции $a^{\tilde x}$ при увеличении $n$ перед данной функцией не появляются дополнительные множители $\ln a$, в отличие от классической производной от вещественной показательной функции, у которой такие множители появляются. Интервальная производная $(a^{\tilde x})^{(n)}$, согласно формуле (25), существует во всех точках $\tilde x = [x_1, x_2]$, в которых $x_1 \ne x_2$; она монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

**Интервальная экспоненциальная функция** выражается в виде

$$\tilde y = [y_1, y_2] = e^{\tilde x} \equiv e^{[x_1, x_2]}\,, \tag{26}$$

где $\tilde x = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde y = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Из сравнения (21) и (26) выясняется, что интервальная экспоненциальная функция (26) – частный случай интервальной показательной функции (21) при $a = e$. Таким образом, из выражения (25) производной любого $n$-го порядка от интервальной показательной функции, положив в нем $a = e$, получим следующее выражение производной любого $n$-го порядка от интервальной экспоненциальной функции

$$\tilde y^{(n)} = (e^{\tilde x})^{(n)} = (e^{[x_1, x_2]})^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde x), f^{(n)}(\tilde x)]\,, \tag{27}$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(e^{x_2} - e^{x_1})/(x_2 - x_1)^n .$$

Из выражения (27) видно, что в интервальной производной $(e^{\tilde{x}})^{(n)}$ любого $n$-го порядка от интервальной экспоненты $e^{\tilde{x}}$ (26) при увеличении $n$ изменяется множитель перед экспонентой, равный

$$M = 2^{n-1}/(x_2 - x_1)^n , \tag{28}$$

в отличие от классической производной от вещественной экспоненты, у которой этого множителя нет. Интервальная производная $(e^{\tilde{x}})^{(n)}$, согласно формуле (27), существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, в которых $x_1 \neq x_2$ и монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

**Интервальная логарифмическая функция** выражается в виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \log_a \tilde{x} = \log_a [x_1, x_2] \quad a > 0, \tag{29}$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно определению интервальной функции [4–5; 7], интервальная функция $\log_a \tilde{x}$ определяется в виде

$$\log_a \tilde{x} = \{\log_a x \mid x \in \tilde{x}\}, \quad a > 0, a \neq 1, \tag{30}$$

при этом $\log_a x$ – исходная обычная логарифмическая функция, которая монотонно возрастает. Это позволяет записать интервальную логарифмическую функцию (29) в явном интервальном виде с помощью такой формулы

$$\tilde{y} \equiv [y_1, y_2] = [\log_a x_1, \log_a x_2], \quad a > 0, a \neq 1. \tag{31}$$

Сравнив выражение (31) с общим выражением любой интервальной функции (1), заключаем, что интервальная логарифмическая функция есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой выглядят как

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \log_a x_1, \\ y_2 &= f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \log_a x_2, \quad a > 0, a \neq 1. \end{aligned} \tag{32}$$

При подстановке (32) в общие формулы интервальных производных (11), (12), выражение производной любого $n$-го порядка от интервальной логарифмической функции $\tilde{y} = \log_a \tilde{x}$ (29) запишется в виде

$$\tilde{y}^{(n)} = (\log_a \tilde{x})^{(n)} = (\log_a [x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})] , \tag{33}$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\log_a x_2 - \log_a x_1)/(x_2 - x_1)^n, \quad a > 0, a \neq 1 ,$$

или после потенцирования

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1} \log_a (x_2 / x_1)/(x_2 - x_1)^n, \quad a > 0, a \neq 1 .$$

Как это видно из (33), в интервальной производной $(\log_a \tilde{x})^{(n)}$ любого $n$-го порядка от интервальной функции $\log_a \tilde{x}$ исходная логарифмическая функция остается логарифмической, в отличие от классической производной от вещественной логарифмической функции $\log_a x$, которая равна $1/x \ln a$, т. е. является рациональной функцией. Производная $(\log_a \tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, в которых $x_1 \neq x_2$, и монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

**Интервальная натуральная логарифмическая функция** выражается в виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \ln \tilde{x} = \ln[x_1, x_2] , \tag{34}$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Из сравнения (29) и (34) мы видим, что интервальная натуральная логарифмическая функция (34) – частный случай интервальной логарифмической функции (29) при $a = e$. Так что из формулы (33) производной любого $n$-го порядка от интервальной логарифмической функции, положив в нем $a = e$, получим выражение производной любого $n$-го порядка от интервальной натурально-логарифмической функции

$$\tilde{y}^{(n)} = (\ln \tilde{x})^{(n)} = (\ln[x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \tag{35}$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1} \ln(x_2 / x_1)/(x_2 - x_1)^n .$$

При этом из формулы (35) видно, что в интервальной производной любого $n$-го порядка $(\ln \tilde{x})^{(n)}$ от интервальной натурально-логарифмической функции $\ln \tilde{x}$ исходная натурально-логарифмическая функция остается натурально-логарифмической, в отличие от классической производной от натурально-логарифмической функции $\ln x$, которая равна $1/x$ и является рациональной функцией. Интервальная производная $(\ln \tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, в которых $x_1 \neq x_2$, она монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

**Интервальная тригонометрическая функция «синус»** выражается в следующем виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \sin \tilde{x} = \sin[x_1, x_2] , \tag{36}$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно определению интервальной функции [4–5; 7], интервальная функция $\sin \tilde{x}$ определяется в виде

$$\sin \tilde{x} = \{\sin x \mid x \in \tilde{x}\} , \tag{37}$$

здесь $\sin x$ – исходная обычная тригонометрическая функция «синус», которая монотонно возрастает на интервале $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, в котором она последовательно принимает все возможные значения от –1 до 1. Последнее позволяет нам записать интервальную тригонометрическую функцию синус (37) в явном интервальном виде с помощью формулы

$$\tilde{y} \equiv [y_1, y_2] = \sin\ \tilde{x} = \sin\,[x_1, x_2] = [\sin\ x_1, \sin\ x_2]\,. \tag{38}$$

Сравнив выражение (38) с общим выражением любой интервальной функции (1), видим, что интервальная тригонометрическая функция «синус» есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \sin\ x_1, \\ y_2 &= f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \sin\ x_2. \end{aligned} \tag{39}$$

Подставляя выражения (39) в общие формулы интервальных производных (11), (12), получаем следующее выражение производной любого $n$-го порядка от интервальной тригонометрической функции $\sin\ \tilde{x}$

$$\tilde{y}^{(n)} = (\sin\ \tilde{x})^{(n)} = (\sin\ [x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})]\,, \tag{40}$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\sin\ x_2 - \sin\ x_1)/(x_2 - x_1)^n\,.$$

Формула (40) показывает, что в интервальной производной любого $n$-го порядка $(\sin\ \tilde{x})^{(n)}$ от интервальной тригонометрической функции $\sin\ \tilde{x}$ исходная тригонометрическая функция синус остается синусом, в отличие от классической производной от обычной тригонометрической функции $\sin x$, которая равна $\cos\ x$. Интервальная производная $(\sin\ \tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, в которых $x_1 \ne x_2$, она монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

**Интервальная тригонометрическая функция «косинус»** выражается в следующем виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \cos\ \tilde{x} = \cos\ [x_1, x_2]\,, \tag{41}$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно общему определению интервальной функции [4–5; 7], интервальная функция $\cos\ \tilde{x}$ определяется в следующем виде:

$$\cos\ \tilde{x} = \{\cos\ x \mid x \in \tilde{x}\}\,, \tag{42}$$

здесь $\cos x$ – исходная обычная тригонометрическая функция «косинус», которая монотонно убывает на интервале $0 \le x \le \pi$, принимая последовательно все свои возможные значения от 1 до –1. Это позволяет нам задать интервальную тригонометрическую функцию «косинус» в явном интервальном виде посредством формулы

$$\begin{aligned} \tilde{y} &\equiv [y_1, y_2] = \cos\ \tilde{x} = \cos\ [x_1, x_2] = \\ &= [\cos\ x_2, \cos\ x_1]. \end{aligned} \tag{43}$$

Сравним выражение (43) с общим выражением интервальной функции (1). Видим, что интервальная тригонометрическая функция «косинус» является интервальной функцией, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \cos\ x_2, \\ y_2 &= f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \cos\ x_1. \end{aligned} \tag{44}$$

Подставляя выражения (44) в общие формулы интервальных производных (11), (12), получим следующее выражение производной любого $n$-го порядка от интервальной тригонометрической функции $\cos\ \tilde{x}$

$$\begin{aligned} &\tilde{y}^{(n)} = (\cos\ \tilde{x})^{(n)} = (\cos\ [x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), \\ &f^{(n)}(\tilde{x})], \end{aligned} \tag{45}$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\cos\ x_1 - \cos\ x_2)/(x_2 - x_1)^n\,.$$

Формула (45) показывает, что в интервальной производной любого $n$-го порядка $(\cos\ \tilde{x})^{(n)}$ от интервальной тригонометрической функции $\cos\ \tilde{x}$ исходная тригонометрическая функция косинус остается косинусом, в отличие от классической производной от вещественной тригонометрической функции $\cos\ x$, которая равна $-\sin x$. Интервальная производная $(\cos\ \tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, где $x_1 \ne x_2$, и монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

**Интервальная тригонометрическая функция «тангенс»** выражается в виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \mathrm{tg}\ \tilde{x} = \mathrm{tg}\ [x_1, x_2]\,, \tag{46}$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно общему определению интервальной функции [4–5; 7], интервальная функция $\mathrm{tg}\ \tilde{x}$ определяется в следующем виде

$$\mathrm{tg}\ \tilde{x} = \{\mathrm{tg}\ x \mid x \in \tilde{x}\}\,, \tag{47}$$

причем $\mathrm{tg}\ x$ – обычная тригонометрическая функция «тангенс», которая монотонно возрастает на интервале $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, где она последовательно принимает все возможные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Это позволяет записать интервальную тригонометрическую функцию «тангенс» (47) в явном интервальном виде с помощью формулы

$$\tilde{y} \equiv [y_1, y_2] = \operatorname{tg}\,\tilde{x} = \operatorname{tg}\,[x_1, x_2] = [\operatorname{tg}\,x_1, \operatorname{tg}\,x_2]. \qquad (48)$$

Сравнивая выражение (48) с общим выражением интервальной функции (1), заключаем, что интервальная тригонометрическая функция «тангенс» является интервальной функцией, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \operatorname{tg}\,x_1, \\ y_2 &= f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \operatorname{tg}\,x_2. \end{aligned} \qquad (49)$$

Подставляя выражения (49) в общие формулы интервальных производных (11), (12), получим следующее выражение производной любого $n$-го порядка от интервальной тригонометрической функции $\operatorname{tg}\,\tilde{x}$

$$\tilde{y}^{(n)} = (\operatorname{tg}\,\tilde{x})^{(n)} = (\operatorname{tg}\,[x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \qquad (50)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\operatorname{tg}\,x_2 - \operatorname{tg}\,x_1)/(x_2 - x_1)^n .$$

Формула (50) показывает, что в интервальной производной любого $n$-го порядка $(\operatorname{tg}\,\tilde{x})^{(n)}$ от интервальной тригонометрической функции $\operatorname{tg}\,\tilde{x}$ исходная тригонометрическая функция «тангенс» остается тангенсом, в отличие от классической производной от обычной тригонометрической функции $\operatorname{tg}\,x$, равной $1/\cos^2 x$. Интервальная производная $(\operatorname{tg}\,\tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, в которых $x_1 \neq x_2$ и монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

**Интервальная тригонометрическая функция «котангенс»** выражается в виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \operatorname{ctg}\,\tilde{x} = \operatorname{ctg}\,[x_1, x_2], \qquad (51)$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. По общему определению интервальной функции [4–5; 7], интервальная функция $\operatorname{ctg}\,\tilde{x}$ определяется в виде

$$\operatorname{ctg}\,\tilde{x} = \{\operatorname{ctg}\,x \mid x \in \tilde{x}\}, \qquad (52)$$

здесь $\operatorname{ctg}\,x$ – исходная обычная тригонометрическая функция «котангенс», которая монотонно убывает на интервале $0 \le x \le \pi$, где она последовательно принимает все возможные значения от $+\infty$ до $-\infty$. Это позволяет нам записать интервальную тригонометрическую функцию «котангенс» (52) в явном интервальном виде с помощью формулы

$$\tilde{y} \equiv [y_1, y_2] = \operatorname{ctg}\,\tilde{x} = \operatorname{ctg}\,[x_1, x_2] = [\operatorname{ctg}\,x_2, \operatorname{ctg}\,x_1]. \qquad (53)$$

Сравнивая выражение (53) с общим выражением произвольной интервальной функции (1), видим, что интервальная тригонометрическая функция «котангенс» есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \operatorname{ctg}\,x_2, \\ y_2 &= f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \operatorname{ctg}\,x_1. \end{aligned} \qquad (54)$$

Подставляя выражения (54) в общие формулы интервальных производных (11), (12), получаем следующее выражение производной любого $n$-го порядка от интервальной тригонометрической функции $\operatorname{ctg}\,\tilde{x}$

$$\tilde{y}^{(n)} = (\operatorname{ctg}\,\tilde{x})^{(n)} = (\operatorname{ctg}\,[x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \qquad (55)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\operatorname{ctg}\,x_1 - \operatorname{ctg}\,x_2)/(x_2 - x_1)^n .$$

Формула (55) показывает, что в интервальной производной любого $n$-го порядка $(\operatorname{ctg}\,\tilde{x})^{(n)}$ от интервальной тригонометрической функции $\operatorname{ctg}\,\tilde{x}$ исходная тригонометрическая функция котангенс остается котангенсом, в отличие от классической производной от обычной тригонометрической функции $\operatorname{ctg}\,x$, которая равна $-1/\sin^2 x$. Интервальная производная $(\operatorname{ctg}\,\tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, где $x_1 \neq x_2$ и монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

**Интервальная обратная тригонометрическая функция «арксинус»** выражается в виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \arcsin\,\tilde{x} = \arcsin\,[x_1, x_2], \qquad (56)$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. По общему определению интервальной функции [4–5; 7], интервальная функция $\arcsin\,\tilde{x}$ определяется в виде

$$\arcsin\,\tilde{x} = \{\arcsin\,x \mid x \in \tilde{x}\}, \qquad (57)$$

в котором $\arcsin x$ есть исходная обычная обратная тригонометрическая функция «арксинус». Последняя монотонно возрастает на интервале $-1 \le x \le 1$, проходя последовательно все возможные значения от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Это позволяет записать интервальную обратную тригонометрическую функцию «арксинус» (57) в явном интервальном виде

$$\begin{aligned} \tilde{y} &\equiv [y_1, y_2] = \arcsin\,\tilde{x} = \arcsin\,[x_1, x_2] = \\ &= [\arcsin\,x_1, \arcsin\,x_2] \end{aligned} \qquad (58)$$

При сравнении выражения (58) с общим выражением интервальной функции (1), устанавливаем, что интервальная обратная тригонометрическая функция «арксинус» является интервальной функцией, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$y_1 = f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \arcsin\ x_1,\\ y_2 = f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \arcsin\ x_2. \qquad (59)$$

Если подставить (59) в общие формулы интервальных производных (11), (12), мы получаем следующее выражение производной любого $n$-го порядка от нашей интервальной обратной тригонометрической функции $\tilde{y} = \arcsin\ \tilde{x}$

$$\tilde{y}^{(n)} = (\arcsin\ \tilde{x})^{(n)} = (\arcsin\ [x_1, x_2])^{(n)} =\\ = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \qquad (60)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\arcsin\ x_2 - \arcsin\ x_1)/(x_2 - x_1)^n .$$

Как видно из выражения (60), в интервальной производной любого $n$-го порядка $(\arcsin \tilde{x})^{(n)}$ от интервальной обратной тригонометрической функции $\arcsin\ \tilde{x}$ исходная обычная обратная тригонометрическая функция арксинус так и остается арксинусом, в отличие от аналогичной классической производной от обычной обратной тригонометрической функции $\arcsin\ x$, которая равна $1/\sqrt{1-x^2}$. Интервальная производная $(\arcsin \tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, где $x_1 \neq x_2$, и монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

**Интервальная обратная тригонометрическая функция «арккосинус»** выражается в виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \arccos\ \tilde{x} = \arccos\ [x_1, x_2], \qquad (61)$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно общему определению интервальной функции [4–5; 7], интервальная функция $\arccos\ \tilde{x}$ определяется в следующем виде:

$$\arccos\ \tilde{x} = \{\arccos\ x \mid x \in \tilde{x}\}, \qquad (62)$$

при этом $\arccos x$ – исходная обычная обратная тригонометрическая функция «арккосинус». Последняя монотонно убывает на $-1 \le x \le 1$, проходя последовательно все возможные значения от $\pi$ до $0$. Это позволяет записать функцию «арккосинус» (62) в явном интервальном виде

$$\tilde{y} \equiv [y_1, y_2] = \arccos\ \tilde{x} = \arccos\ [x_1, x_2] =\\ = [\arccos\ x_2, \arccos\ x_1]. \qquad (63)$$

Сравнив выражение (63) с общим выражением любой интервальной функции (1), устанавливаем, что интервальная обратная тригонометрическая функция «арккосинус» является интервальной функцией, у которой нижняя и верхняя граничные функции таковы:

$$y_1 = f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \arccos\ x_2,\\ y_2 = f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \arccos\ x_1. \qquad (64)$$

Подставив выражения (64) в общие формулы интервальных производных (11), (12), получим следующее выражение производной любого $n$-го порядка от интервальной обратной тригонометрической функции $\tilde{y} = \arccos\ \tilde{x}$:

$$\tilde{y}^{(n)} = (\arccos\ \tilde{x})^{(n)} = (\arccos\ [x_1, x_2])^{(n)} =\\ = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \qquad (65)$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\arccos\ x_1 - \arccos\ x_2)/(x_2 - x_1)^n .$$

Формула (65) отражает факт, что в интервальной производной любого $n$-го порядка $(\arccos \tilde{x})^{(n)}$ от интервальной обратной тригонометрической функции $\arccos \tilde{x}$ исходная обычная обратная тригонометрическая функция арккосинус остается арккосинусом, в отличие от классической производной от обычной обратной тригонометрической функции $\arccos\ x$, равной $-1/\sqrt{1-x^2}$. Интервальная производная $(\arccos \tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, в которых $x_1 \neq x_2$. Она монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

**Интервальная обратная тригонометрическая функция «арктангенс»** выражается в виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \mathrm{arctg}\ \tilde{x} = \mathrm{arctg}\ [x_1, x_2], \qquad (66)$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. По общему определению интервальной функции [4–5; 7], интервальная функция $\mathrm{arctg}\ \tilde{x}$ определяется как

$$\mathrm{arctg}\ \tilde{x} = \{\mathrm{arctg}\ x \mid x \in \tilde{x}\}, \qquad (67)$$

при этом $\mathrm{arctg}\ x$ – исходная обычная обратная тригонометрическая функция «арктангенс». Последняя монотонно возрастает на интервале $-\infty < x < \infty$, проходя последовательно все свои возможные значения от $-\pi/2$ до $\pi/2$, что дает возможность записать интервальную обратную тригонометрическую функцию «арктангенс» (67) в явном виде

$$\tilde{y} \equiv [y_1, y_2] = \mathrm{arctg}\ \tilde{x} = \mathrm{arctg}\ [x_1, x_2] =\\ = [\mathrm{arctg}\ x_1, \mathrm{arctg}\ x_2]. \qquad (68)$$

Сравним теперь выражение (68) с общим выражением любой интервальной функции (1). Хорошо видно, что интервальная обратная тригонометрическая функция «арктангенс» является интервальной функцией, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \operatorname{arctg}\ x_1, \\ y_2 &= f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \operatorname{arctg}\ x_2. \end{aligned} \tag{69}$$

Подставив выражения (69) в общие формулы для интервальных производных (11), (12), найдем выражение интервальной производной любого $n$-го порядка от интервальной обратной тригонометрической функции $\tilde{y} = \operatorname{arctg} \tilde{x}$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{y}^{(n)} &= (\operatorname{arctg}\ \tilde{x})^{(n)} = (\operatorname{arctg}\ [x_1, x_2])^{(n)} = \\ &= [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \end{aligned} \tag{70}$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\operatorname{arctg}\ x_2 - \operatorname{arctg}\ x_1)/(x_2 - x_1)^n.$$

Запись (70) дает понять, что в выражении интервальной производной любого $n$-го порядка $(\operatorname{arctg} \tilde{x})^{(n)}$ от интервальной обратной тригонометрической функции $\operatorname{arctg} \tilde{x}$ исходная обычная обратная тригонометрическая функция арктангенс остается арктангенсом, в отличие от классической производной от обычной обратной тригонометрической функции $\operatorname{arctg}\ x$, которая равна $1/(1+x^2)$. Интервальная производная $(\operatorname{arctg} \tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, в которых $x_1 \neq x_2$. Она монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

**Интервальная обратная тригонометрическая функция «арккотангенс»** выражается в виде

$$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \operatorname{arcctg}\ \tilde{x} = \operatorname{arcctg}\ [x_1, x_2], \tag{71}$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. По общему определению интервальной функции [4–5; 7], интервальная функция $\operatorname{arcctg}\ \tilde{x}$ определяется в виде

$$\operatorname{arcctg}\ \tilde{x} = \{\operatorname{arcctg}\ x \mid x \in \tilde{x}\}, \tag{72}$$

при этом $\operatorname{arcctg} x$ – исходная обычная обратная тригонометрическая функция «арккотангенс». Последняя монотонно убывает на интервале $-\infty < x < \infty$ и проходит последовательно все возможные значения от $\pi$ до $0$. Это позволяет записать интервальную обратную тригонометрическую функцию «арккотангенс» (72) в явном виде

$$\begin{aligned} \tilde{y} &\equiv [y_1, y_2] = \operatorname{arcctg}\ \tilde{x} = \operatorname{arcctg}\ [x_1, x_2] = \\ &= [\operatorname{arcctg}\ x_2, \operatorname{arcctg}\ x_1]. \end{aligned} \tag{73}$$

Если сравнить (73) с общим выражением любой интервальной функции (1), можно видеть, что интервальная обратная тригонометрическая функция «арккотангенс» является интервальной функцией, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \operatorname{arcctg}\ x_2, \\ y_2 &= f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \operatorname{arcctg}\ x_1. \end{aligned} \tag{74}$$

Подставив выражения (74) в общие формулы для интервальных производных (11), (12), получим следующее выражение производной любого $n$-го порядка от интервальной функции $\tilde{y} = \operatorname{arcctg} \tilde{x}$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{y}^{(n)} &= (\operatorname{arcctg}\ \tilde{x})^{(n)} = (\operatorname{arcctg}\ [x_1, x_2])^{(n)} = \\ &= [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})], \end{aligned} \tag{75}$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\operatorname{arcctg}\ x_1 - \operatorname{arcctg}\ x_2)/(x_2 - x_1)^n.$$

Формула (75) показывает, что в интервальной производной любого $n$-го порядка $(\operatorname{arcctg} \tilde{x})^{(n)}$ от интервальной обратной тригонометрической функции $\operatorname{arcctg} \tilde{x}$ исходная обычная обратная тригонометрическая функция арккотангенс остается арккотангенсом, в отличие от классической производной от вещественной обратной тригонометрической функции $\operatorname{arcctg}\ x$, которая равна $-1/(1+x^2)$. Интервальная производная $(\operatorname{arcctg} \tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, в которых $x_1 \neq x_2$ и монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе автором получен полный набор производных любых порядков от всех существующих элементарных интервальных функций (формулы (15), (20), (25), (27), (33), (35), (40), (45), (50), (55), (60), (65), (70), (75)). Выявлены различия между интервальными производными от интервальных элементарных функций и классическими производными от обычных детерминированных элементарных функций. При этом главное различие состоит в том, что производная любого $n$-го $(n = 1,2,...)$ порядка от любой интервальной функции $\tilde{P}(\tilde{x})$, в частности, элементарной функции, всегда представляет собой функцию класса $\tilde{P}(\tilde{x}) / \tilde{x}^n$. В соответствии с этим интервальную производную любого $n$-го порядка с полным правом можно интерпретировать как скорость $n$-го порядка изменения функции $P(\tilde{x})$ относительно ее аргумента $\tilde{x}$. Известно, что классическая производная любого порядка $n$ от любой детерминированной функции $P(x)$ не обязательно представляет собой функцию класса $P(x)/x^n$. Поэтому такую производную в общем случае нельзя интерпретировать как скорость $n$-го порядка изменения функции $P(x)$ относительно ее аргумента. Это означает, в свою очередь, что классическая производная Ньютона–Лейбница, вообще говоря, не может считаться адекватной моделью динамики большинства природных объектов и процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 2004. 350 с.
2. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 160 с.
3. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 356 с.
4. *Левин В.И.* Интервальная производная и начала недетерминистского дифференциального исчисления // Онтология проектирования. 2013. № 4 (10). С. 72-85.
5. *Левин В.И.* Интервально-дифференциальное исчисление и некоторые его применения // Информационные технологии. 2014. № 7. С. 3-10.
6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. М.: Физматлит, 2001. Т. 1. 616 с.
7. *Левин В.И.* Дифференциальное исчисление для интервально-определенных функций // Эвристические алгоритмы и распределенные вычисления. 2015. Т. 2. № 2. С. 8-25.


Поступила в редакцию 18 сентября 2015 г.

Левин Виталий Ильич, Пензенская государственная технологическая академия, г. Пенза, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, советник ректора по науке, заслуженный деятель науки РФ, e-mail: levin@pgta.ru

UDC 62-50; 519.7; 519.8
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-131-141

## DERIVATIVES OF INTERVAL ELEMENTARY FUNCTIONS

**© V.I. Levin**


The problems related to calculation of derivatives of interval-specified functions are considered. These problems are relevant in study of systems with any level of uncertainty (nondeterministic systems). Specifically we speak about simple systems described by elementary interval-specific functions. Accordingly we solved problem of calculating derivatives of elementary interval-specified functions. Previously obtained formulas and methods of finding derivatives of any intervally defined functions are used.

Basic definitions related to derivatives of the interval-specified functions are given and formulas of two types that allow you to calculate interval derivatives are presented. The first type formulae express derivatives in the closed interval form, which requires to compute using the apparatus of interval mathematics. But formulae of the second type can express derivatives in the open interval form, i. e. in form of two formulas. Formulas above expresses the lower and the upper limits of the interval representing the derivative. Here finding the derivative of interval-defined function is reduced to computation of two ordinary certain functions.

Using above mathematical apparatus we find the derivatives of all elementary interval functions: interval constant, interval power function, interval exponential function, interval logarithmic function, interval natural-logarithmic function, interval trigonometric functions (sine, cosine, tangent, cotangent), interval inverse trigonometric functions (arcsine, arccosine, arctangent and arccotangent). Formulae of all the derivatives are shown in form of an open interval. The difference between derivatives of interval elementary functions and the derivatives of normal (i.e. non-interval) elementary functions is discussed.


*Key words*: interval; interval function; interval derivative; interval computations; interval-differential calculus.

REFERENCES


1. Gnedenko B.V. *Kurs teorii veroyatnostey*. Moscow, Nauka Publ., 2004. 350 p.
2. Zade L.A. *Ponyatie lingvisticheskoy peremennoy i ego primenenie k prinyatiyu priblizhennykh resheniy*. Moscow, Mir Publ., 1976. 160 p.
3. Alefeld G., Khertsberger Y. *Vvedenie v intervalnye vychisleniya*. Moscow, Mir Publ., 1987. 356 p.
4. Levin V.I. Intervalnaya proizvodnaya i nachala nedeterministskogo differentsialnogo ischisleniya. *Ontologiya proektirovaniya*, 2013, no. 4 (10), pp. 72-85.

5. Levin V.I. Intervalno-differentsialnoe ischislenie i nekotorye ego primeneniya. *Informatsionnye tekhnologii*, 2014, no. 7, pp. 3-10.
6. Fikhtengolts G.M. *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya*: v 3 t. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, vol. 1. 616 p.
7. Levin V.I. Differentsialnoe ischislenie dlya intervalno-opredelennykh funktsiy. *Evristicheskie algoritmy i raspredelennye vychisleniya*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 8-25.

Received 18 September 2015

Levin Vitaliy Ilyich, Penza State Technological Academy, Penza, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor, Science Advisor of Rector, Honored Worker of Science of Russian Federation, e-mail: levin@pgta.ru