Приводятся различные примеры, в частности дифференциальные операторы эллиптического типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд., доп. и перераб. М.: Наука, 1988.
2. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970.
3. *Левитан Б.М., Жиков В.В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.

Поступила в редакцию 5 мая 2015 г.

Tyurin V.M. ABOUT ONE PROPERTY OF WELL-POSED LINER OPERATORS IN THE SOBOLEV AND SOBOLEV–STEPANOV SPACES

Under some requirements on two linear operators that act accordingly in the spaces of Sobolev and Sobolev–Stepanov, a theorem about simultaneous generalized well-posedness of these operators is obtained.

Key words: linear operators; space of Sobolev-Stepanov; generalized well-posedness.

Тюрин Василий Михайлович, Липецкий государственный педагогический университет, г. Липецк, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики, e-mail: tvmla@yandex.ru

Tyurin Vasily Mikhailovich, Lipetsk State Pedagogical University, Lipetsk, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematics Department, e-mail: tvmla@yandex.ru

УДК 517.51

О КОРРЕКТНОСТИ УПРАВЛЯЕМОЙ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, СОДЕРЖАЩЕЙ ФАЗОВЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ПО УПРАВЛЕНИЮ

© О.И. Филиппова

Ключевые слова: управляемая импульсная система с запаздыванием; дифференциальное включение; априорная ограниченность в совокупности на множестве.

Рассматривается управляемая импульсная система с запаздыванием, содержащая фазовые ограничения по управлению. Показано, что если в какой-либо точке параметра множество фазовых траекторий системы априорно ограничено, то оно будет априорно ограничено при всех значениях параметра из некоторой окрестности этой точки. Получены оценки отклонения в пространстве кусочно-непрерывных функций множества фазовых траекторий от наперед заданной функции. Установлена непрерывная зависимость фазовых траекторий от параметров и начальных условий.

Основные обозначения

Для линейного нормированного пространства $\mathbf{X}$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ обозначаем $\rho_{\mathbf{X}}[x;U] = \inf\{\|x-u\|_{\mathbf{X}} : u \in U\}$ — расстояние от точки $x \in \mathbf{X}$ до множества $U \subset \mathbf{X}$; $h^{+}_{\mathbf{X}}[U_1;U] = \sup\{\rho_{\mathbf{X}}[x,U] : x \in U_1\}$ — полуотклонение по Хаусдорфу от множества $U_1 \subset \mathbf{X}$ до множества $U \subset \mathbf{X}$; $h_{\mathbf{X}}[U_1;U] = \max\{h^+_{\mathbf{X}}[U_1;U]; h^+_{\mathbf{X}}[U;U_1]\}$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U; $B_{\mathbf{X}}(x,\varepsilon)$ — открытый шар с центром в точке $x \in \mathbf{X}$ радиуса $\varepsilon > 0$.

В статье используются следующие пространства и множества: $\mathbb{R}^n$ — вещественное n-мерное пространство вектор-столбцов с евклидовой нормой $|\cdot|$; $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; $\mathrm{conv}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; $\mathbf{C}^n[a,b]$ — пространство непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{C}^n} = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$; $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ — множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_m,b]$ (где $a < t_1 < \ldots < t_m < b$ — заданный набор точек) функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k=1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$; $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ — пространство функций $x:[a,\tau]\to\mathbb{R}^n$, являющихся сужениями на отрезок $[a,\tau]$, $\tau\in(a,b]$, функций из $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} = \sup\{|x(t)| : t\in[a,\tau]\}$; $\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ — конус неотрицательных функций пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^1[a,b]$; $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$ — пространство суммируемых по Лебегу функций $x:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$, где множество $\mathcal{U}\subset[a,b]$ измеримо и имеет меру $\mu(\mathcal{U})>0$, с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|ds$; $\mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$ — множество всех ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$; $\mathbf{L}^1_+[a,b]$ — конус неотрицательных функций пространства $\mathbf{L}^1[a,b]$; $\mathbf{L}^n_\infty[a,b]$ — пространство измеримых по Лебегу ограниченных в существенном функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}_\infty[a,b]} = \mathrm{vraisup}\{|x(t)| : t\in[a,b]\}$.

Введение

В связи с многочисленными приложениями в теории управления и оптимального управления, теории стабилизации, дифференциальных играх в последние годы интенсивно изучаются функционально-дифференциальные уравнения и включения с импульсными воздействиями (наиболее полное изложение основных результатов теории импульсных систем содержится в монографиях Е.А. Барбашина, А.И. Булгакова–О.В. Филипповой, С.Т. Завалищина–А.Н. Сесекина, В.М. Матросова, А.Д. Мышкиса–А.М Самойленко, А.М Самойленко–Н.А. Перестюка, В.В. Обуховского–М.И. Каменского–P. Zecca, Е.С. Пятницкого, А.Ф. Филиппова, А. Халаная–Д. Векслера и др.).

В статье для управляемых импульсных систем с запаздыванием, содержащих фазовые ограничения по управлению получены оценки допустимых траекторий, аналогичные оценкам В.И. Благодатских, А.Ф. Филиппова [1, 2] решений дифференциальных включений, установлена непрерывная зависимость фазовых траекторий от параметров и начальных условий. Исследование основано на сведении управляемой системы к функционально-дифференциальному включению, которое исследуется методами [3–5].

§1. Основные понятия. Априорная ограниченность фазовых траекторий

Пусть Ξ — метрическое пространство. Пусть заданы отображения

$$f:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^l\times\Xi\to\mathbb{R}^n,\quad U:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\Xi\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^l],$$

удовлетворяющие условиям:

1) при каждом фиксированном $(x,u,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^l\times\Xi$ функция $f(\cdot,x,u,\xi)$ измерима (по Лебегу);

2) при почти всех $t\in[a,b]$ функция $f(t,\cdot,\cdot,\cdot)$ непрерывна;

3) для каждого ограниченного множества $W\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^l\times\Xi$ существует такая суммируемая функция $m_W:[a,b]\to[0,\infty)$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $(x,u,\xi)\in W$ выполняется неравенство $|f(t,x,u,\xi)|\leqslant m_W(t)$;

4) при каждом $(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\Xi$ отображение $U(\cdot,x,\xi)$ измеримо;
5) при почти всех $t\in[a,b]$ отображение $U(t,\cdot,\cdot)$ непрерывно по Хаусдорфу;
6) для каждого ограниченного множества $V\subset\mathbb{R}^n\times\Xi$ существует такая константа m_V, что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $(x,\xi)\in V$ выполнено

$$|U(t,x,\xi)|=\sup\{|u|:u\in U(t,x,\xi)|\}\leqslant m_V.$$

Рассмотрим управляемую систему с запаздыванием

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=f(t,x(p(t)),u(t),\xi),\quad u(t)\in U(t,x(g(t)),\xi),\\ x(s)=\varphi(s),\ \text{если } s<a,\end{gathered}\tag{1}$$

испытывающую импульсные воздействия

$$\Delta(x(t_k))=J_k(x(t_k),\xi),\ \ k=1,2,\ldots,m,\tag{2}$$

при начальном условии

$$x(a)=\alpha.\tag{3}$$

Здесь параметр $\xi\in\Xi$, начальное значение $\alpha\in\mathbb{R}^n$; функция $\varphi:(-\infty,a)\to\mathbb{R}^n$ измерима по Борелю и ограничена; измеримые функции $p:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ для любого $t\in[a,b]$ удовлетворяют неравенствам $p(t)\leqslant t$, $g(t)\leqslant t$; отображения $J_k:\mathbb{R}^n\times\Xi\to\mathbb{R}^n$ непрерывны, $\Delta(x(t_k))=x(t_k+0)-x(t_k)$, $k=1,2,\ldots,m$. Поскольку выбор управления зависит от состояния управляемого объекта, рассматриваемая система (1)–(2) относится к системам с фазовыми ограничениями по управлению.

Пусть $\tau\in[a,b]$. Определим непрерывные отображения $\mathcal{P}_\tau:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]\to\mathbf{L}^n_\infty[a,\tau]$, $\mathcal{G}_\tau:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]\to\mathbf{L}^n_\infty[a,\tau]$ равенствами

$$(\mathcal{P}_\tau x)(t)=\begin{cases}x(p(t)), & \text{если}\quad p(t)\in[a,\tau],\\ \varphi(p(t)), & \text{если}\quad p(t)<a,\end{cases}\tag{4}$$

$$(\mathcal{G}_\tau x)(t)=\begin{cases}x(g(t)), & \text{если}\quad g(t)\in[a,\tau],\\ \varphi(g(t)), & \text{если}\quad g(t)<a.\end{cases}\tag{5}$$

Для $s\in(a,\tau]$ обозначим $\chi_{[s,\tau]}(t)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad t\in[a,s],\\ 1, & \text{если}\quad t\in(s,\tau].\end{cases}$

Под *допустимым управлением на отрезке* $[a,\tau]$ системы (1)–(3) будем понимать такую функцию $u\in\mathbf{L}^l_\infty[a,\tau]$, для которой существует функция $x\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$, удовлетворяющая при всех $t\in[a,\tau]$ уравнению

$$x(t)=\alpha+\int\limits_a^t f(s,(\mathcal{P}_\tau x)(s),u(s),\xi)ds+\sum_{k:t_k\in[a,\tau]}J_k(x(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t),\tag{6}$$

и включению

$$u(t)\in U(t,(\mathcal{G}_\tau x)(t),\xi).\tag{7}$$

В этом случае пару $(u,x)\in\mathbf{L}^l_\infty[a,\tau]\times\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ будем называть *допустимой парой на отрезке* $[a,\tau]$.

Пусть $H(\alpha,\tau,\xi)$ – множество всех допустимых пар управляемой системы (1)–(3) на отрезке $[a,\tau]$, а $\widetilde{H}(\alpha,\tau,\xi)$ – множество всех фазовых траекторий этой системы.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что множество фазовых траекторий управляемой импульсной системы (1)$-$(3) *априорно ограничено в точке* $(\alpha,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\Xi$, если найдется такое число $\mathbf{r} > 0$, что для всякого $\tau \in (a, b]$ не существует $x \in \widetilde{H}(\alpha, \tau, \xi)$, для которого выполняется неравенство $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} > \mathbf{r}$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{B} \subset \Xi$. Множество фазовых траекторий управляемой импульсной системы $(1)-(3)$ *априорно ограничено в совокупности на множестве* $\mathfrak{S} \times \mathfrak{B}$, если оно априорно ограничено в каждой точке $(\alpha, \xi) \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{B}$ и константа $\mathbf{r} > 0$ в определении 1 является общей для всех точек из множества $\mathfrak{S} \times \mathfrak{B}$.

На основании результатов работ [1, 6] в монографии [3] доказана

Т е о р е м а 1. *Пусть множество всех фазовых траекторий управляемой системы (1)–(3) априорно ограничено в точке* $(\alpha_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$. *Тогда* $H(\alpha_0, \tau, \xi_0) \neq \varnothing$ *для любого* $\tau \in (a, b]$, *и существует такое* $\varepsilon > 0$, *что множество фазовых траекторий управляемой системы (1)–(3) априорно ограничено в совокупности на множестве* $B_{\mathbb{R}^n}(\alpha_0, \varepsilon) \times B_{\Xi}(\xi_0, \varepsilon)$.

З а м е ч а н и е 1. В предположении априорной ограниченности множества фазовых траекторий системы $(1)–(3)$ в точке $(\alpha, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$, любая допустимая пара $(u, x) \in H(\alpha, \tau, \xi)$ продолжаема на весь отрезок $[a, b]$; доказательство этого результата приведено в [4].

§2. Оценки фазовых траекторий

Определим отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ равенством

$$F(t, x, y, \xi) = f(t, x, U(t, y, \xi), \xi). \tag{8}$$

В силу леммы А.Ф. Филиппова [2] (см. также [7, 8]), соотношения (1) эквивалентны функционально-дифференциальному включению

$$\dot{x}(t) \in F(t, (\mathcal{P}_\tau x)(t), (\mathcal{G}_\tau x)(t), \xi),\ t \in [a, \tau], \tag{9}$$

в том смысле, что если $(u, x) \in \mathbf{L}^l_\infty[a, \tau] \times \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau]$ — допустимая пара для управляемой системы $(1)–(3)$, то $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau]$ будет решением (9), (2), (3); обратно, если $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau]$ — решение (9), (2), (3), то пара $(u, x) \in \mathbf{L}^l_\infty[a, \tau] \times \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau]$, где $u \in \mathbf{L}^l_\infty[a, \tau]$ определяется равенством (7), будет допустимой для $(1)-(3)$. Таким образом, множество решений задачи (9), (2), (3) совпадает с множеством всех фазовых траекторий исходной управляемой системы $(1)-(3)$. В связи с этим, будем обозначать множество решений задачи (9), (2), (3) на $[a, b]$ также, как и множество всех фазовых траекторий системы $(1)-(3)$, символом $\widetilde{H}(\alpha, b, \xi)$.

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что отображения

$$f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \Xi \to \mathbb{R}^n,\quad U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^l]$$

обладают свойством Ω *в точке* $\xi_0 \in \Xi$, если найдутся отображения

$$\omega_1 : [a, b] \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty),\quad \omega_2 : [a, b] \times [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty),$$

удовлетворяющие условиям Каратеодори, неубывающие при фиксированных первом и последнем аргументах и такие, что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $\xi \in \Xi$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^l$ выполняются неравенства

$$|f(t, x_1, u_1, \xi_0) - f(t, x_2, u_2, \xi)| \leqslant \omega_1(t, |x_1 - x_2|, |u_1 - u_2|, \rho[\xi_0, \xi]), \tag{10}$$

$$h[U(t, x_1, \xi_0), U(t, x_2, \xi)] \leqslant \omega_2(t, |x_1 - x_2|, \rho[\xi_0, \xi]). \tag{11}$$

Л е м м а 1. *Пусть отображения* f, U *обладают свойством* Ω *в точке* $\xi_0 \in \Xi$. *Тогда для отображения* $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, *заданного равенством (8), при почти всех* $t \in [a, b]$ *и любых* $\xi \in \Xi$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}^n$ *выполняется неравенство*

$$h[F(t, x_1, y_1, \xi_0), F(t, x_2, y_2, \xi)] \leqslant \omega(t, |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, \xi), \tag{12}$$

где функция $\omega : [a,b]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\times\Xi\to[0,\infty)$ *определена соотношением*

$$\omega(t,x,y,\xi)=\omega_1(t,x,\omega_2(t,y,\rho[\xi_0,\xi]),\rho[\xi_0,\xi]). \tag{13}$$

Действительно, согласно определению (8) отображения F из (10) вытекает соотношение

$$h[F(t,x_1,y_1,\xi_0),F(t,x_2,y_2,\xi)]\leqslant\omega_1(t,|x_1-x_2|,h[U(t,y_1,\xi),U(t,y_2,\xi)],\rho[\xi_0,\xi]),$$

а из неравенства (11) следует требуемая оценка (12).

О п р е д е л е н и е 4. Будем говорить, что отображения

$$f:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^l\times\Xi\to\mathbb{R}^n,\ \ U:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\Xi\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^l],\ \ J_k:\mathbb{R}^n\times\Xi\to\mathbb{R}^n,\ k=\overline{1,m},$$

обладают свойством $\mathcal{D}$ *в точке* $(\gamma_0,\xi_0)\in[0,\infty)\times\Xi$, если

1) отображения f,U обладают свойством Ω в точке $\xi_0\in\Xi$;

2) для каждого $k=\overline{1,m}$ найдется непрерывная функция $\widetilde{J}_k:\mathbb{R}^1_+\times\Xi\to\mathbb{R}^1_+$, неубывающая по первому аргументу при каждом фиксированном значении второго аргумента, удовлетворяющая равенству $\widetilde{J}_k(0,\xi_0)=0$, и такая, что для любых $x,y\in\mathbb{R}^n$ и каждом $\xi\in\Xi$ выполняется оценка

$$|J_k(x,\xi)-J_k(y,\xi)|\leqslant\widetilde{J}_k(|x-y|,\xi); \tag{14}$$

3) множество решений задачи

$$\dot y(t)=\omega(t,y(t),y(t),\xi),\quad \Delta(y(t_k))=\widetilde{J}_k(y(t_k),\xi),\ k=\overline{1,m},\quad y(a)=\gamma_0 \tag{15}$$

где функция $\omega:[a,b]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\times\Xi\to[0,\infty)$ определена равенством (13), ограничено.

Пусть оператор Немыцкого $N:\mathbf{L}^n_\infty[a,b]\times\mathbf{L}^n_\infty[a,b]\times\Xi\to\mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$, порожденный отображением $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\Xi\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ (см. (8)), задан соотношением

$$N(x,y,\xi)=\{z\in\mathbf{L}^n[a,b]:z(t)\in F(t,x(t),y(t),\xi)\ \text{при почти всех}\ t\in[a,b]\}. \tag{16}$$

Отметим, что если множество решений включения (9) с импульсными воздействиями (2) и начальным условием (3) априорно ограничено в фиксированной точке $(\alpha_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^n\times$ $\times\,\Xi$, то согласно теореме 1 $\widetilde{H}(\alpha_0,b,\xi_0)\neq\emptyset$ (см. также [4]). Пусть $x_{\alpha_0\xi_0}\in\widetilde{H}(\alpha_0,b,\xi_0)$. По определению решения задачи (9), (2), (3) (см. [4]), для функции $x_{\alpha_0\xi_0}\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ найдется такой элемент $q_{\alpha_0\xi_0}\in N(P_bx_{\alpha_0\xi_0},G_bx_{\alpha_0\xi_0},\xi_0)$, где операторы $P_b:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]\to\mathbf{L}^n_\infty[a,b]$, $G_b:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]\to\mathbf{L}^n_\infty[a,b]$ определены при $\tau=b$ равенствами (4), (5) соответственно, что функция $x_{\alpha_0\xi_0}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ представима в виде

$$x_{\alpha_0\xi_0}(t)=\alpha_0+\int\limits_a^t q_{\alpha_0\xi_0}(s)ds+\sum_{k=1}^m J_k(x_{\alpha_0\xi_0}(t_k),\xi)\chi_{(t_k,b]}(t). \tag{17}$$

З а м е ч а н и е 2. Согласно теореме 1, если множество $\widetilde{H}(\alpha_0,b,\xi_0)$ априорно ограничено в точке $(\alpha_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^n\times\Xi$, то существует такое $\delta>0$, что оно априорно ограничено в совокупности на множестве $B_{\mathbb{R}^n}(\alpha_0,\delta)\times B_\Xi(\xi_0,\delta)$. Поэтому для любых $(\alpha,\xi)\in B_{\mathbb{R}^n}(\alpha_0,\delta)\times$ $\times\,B_\Xi(\xi_0,\delta)$ множество $\widetilde{H}(\alpha,b,\xi)\neq\varnothing$, и существует такое $r>0$, что при всех $\tau\in(a,b]$ для каждого $x_{\alpha\xi}\in\widetilde{H}(\alpha,b,\xi)$ выполняется неравенство $\|x_{\alpha\xi}\|_{\widetilde{\mathbf{C}}[a,\tau]}\leqslant r$.

Определим отображение $\widetilde{N}:\widetilde{\mathbf{C}}_+{}^1[a,b]\times\Xi\to\mathbf{L}_+{}^1[a,b]$ равенством

$$\widetilde{N}(x,\xi)(t)=\omega(t,x(t),x(t),\xi), \tag{18}$$

где функция $\omega : [a,b] \times [0,\infty) \times [0,\infty) \times \Xi \to [0,\infty)$ задана соотношением (13).

Наряду с задачей (15) будем рассматривать задачу

$$\begin{aligned} &\dot{z}(t) = \widetilde{N}((\Theta z), \xi_0)(t), \\ &\Delta(z(t_k)) = \widetilde{J}_k(z(t_k), \xi_0), \ k = 1, 2, \ldots, m, \\ &z(a) = \gamma_0, \end{aligned} \tag{19}$$

где отображение $\Theta : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ имеет вид

$$(\Theta z)(t) = \underset{s \in [a,t]}{\mathrm{vraisup}}\, z(s). \tag{20}$$

Пусть $\eta > 0$. Определим измеримую по первому аргументу функцию $\varkappa_0 : [a,b] \times \Xi \to [0,\infty)$ равенством

$$\varkappa_0(t,\xi) = h[F(t, (\mathcal{P}_b x_{\alpha_0 \xi_0})(t), (\mathcal{G}_b x_{\alpha_0 \xi_0})(t), \xi_0), F(t, (\mathcal{P}_b x_{\alpha_0 \xi})(t), (\mathcal{G}_b x_{\alpha_0 \xi})(t), \xi)], \tag{21}$$

где $x_{\alpha_0 \xi_0} \in \widetilde{H}(\alpha_0, b, \xi_0)$, $x_{\alpha_0 \xi} \in \widetilde{H}(\alpha_0, b, \xi)$.

Для задачи (19) рассмотрим задачу при малом изменении параметров $\xi = \xi_0$, $\gamma = \gamma_0$ и правой части, которую определим в виде

$$\begin{aligned} &\dot{z}(t) = \varkappa_0(t,\xi) + \eta + \widetilde{N}((\Theta z), \xi)(t), \\ &\Delta(z(t_k)) = \widetilde{J}_k(z(t_k), \xi), \ k = 1, 2, \ldots, m, \\ &z(a) = \gamma. \end{aligned} \tag{22}$$

Далее, пусть в точке (γ_0, ξ_0) выполняется свойство $\mathcal{D}$. В следующей лемме показана связь априорной ограниченности множества решений задач (15) и (22) при малом изменении параметров $\xi = \xi_0$, $\gamma = \gamma_0$, $\eta > 0$.

Л е м м а 2. *Если множество решений задачи* (15) *ограничено в точке* $(\gamma_0, \xi_0) \in [0,\infty) \times \Xi$, *то существует такое* $\delta > 0$, *что множество всех решений задачи* (22) *априорно ограничено в совокупности на множестве* $B_\Xi(\xi_0,\delta) \times (0,\delta) \times (\gamma_0 - \delta, \gamma_0 + \delta) \bigcap [0,\infty)$. *Причем, для каждого* $\tau \in (a,b]$ *любое решение задачи* (22), *определенное на отрезке* $[a,\tau]$ *не превосходит верхнего решения обыкновенного дифференциального уравнения с импульсными воздействиями*

$$\begin{aligned} &\dot{z}(t) = \varkappa_0(t,\xi) + \eta + \widetilde{N}(z, \xi)(t), \\ &\Delta(z(t_k)) = \widetilde{J}_k(z(t_k), \xi), \ k = 1, 2, \ldots, m, \\ &z(a) = \gamma \end{aligned} \tag{23}$$

при всех $(\xi, \eta, \gamma) \in B_\Xi(\xi_0,\delta) \times (0,\delta) \times (\gamma_0 - \delta, \gamma_0 + \delta) \bigcap [0,\infty)$.

Будем говорить, что множество решений задачи (9), (2), (3) *почти реализует расстояние до произвольной суммируемой функции*, если для любого $v \in \mathbf{L}^n[a,b]$ и любого $\eta > 0$ существует такое решение $x_{\alpha\xi\eta} \in \widetilde{H}(\alpha, b, \xi)$, что для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$\|q_{\alpha\xi\eta} - v\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} \leqslant \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v, N(\mathcal{P}_b x_{\alpha\xi\eta}, \mathcal{G}_b x_{\alpha\xi\eta}, \xi)] + \eta\mu(\mathcal{U}), \tag{24}$$

где $q_{\alpha\xi\eta} \in N(\mathcal{P}_b x_{\alpha\xi\eta}, \mathcal{G}_b x_{\alpha\xi\eta}, \xi)$ почти всюду на $[a,b]$ и удовлетворяет равенству (17) (в котором вместо ξ_0 параметр имеет значение ξ, а начальное значение α_0 принимает значение α).

Согласно [3], если множество $\widetilde{H}(\alpha, b, \xi)$ априорно ограничено в совокупности на множестве $B_{\mathbb{R}^n}(\alpha_0,\delta) \times B_\Xi(\xi_0,\delta)$, то оно почти реализует расстояние от любой суммируемой функции до значений решений включения (9) при каждом $\alpha \in B_{\mathbb{R}^n}(\alpha_0,\delta)$ и $\xi \in B_\Xi(\xi_0,\delta)$.

Поэтому при любом $\eta > 0$ существует такое решение $x_{\alpha\xi\eta} \in \widetilde{H}(\alpha, b, \xi)$, что для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ справедливо неравенство (24) при $v = q_{\alpha_0\xi_0}$ (см. (17)). Такая оценка позволяет получить следующий результат

Т е о р е м а 2. *Пусть отображения* $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \Xi \to \mathbb{R}^n$, $U : [a, b] \times \times \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^l]$ *и импульсные воздействия* $J_k : \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots, m$, *обладают свойством* $\mathcal{D}$ *в точке* $(\gamma_0, \xi_0) \in [0, \infty) \times \Xi$, *множество* $\widetilde{H}(\alpha_0, b, \xi_0)$ *априорно ограничено в точке* $(\alpha_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$. *Тогда найдется такое* $\delta > 0$, *что для любого* $\eta > 0$, *удовлетворяющего неравенству* $\eta < \delta$, *любого* $\xi \in B_{\Xi}(\xi_0, \delta)$ *и всех* $\alpha \in B_{\mathbb{R}^n}(\alpha_0, \delta)$ *найдется такое решение* $x_{\alpha\xi\eta} \in \widetilde{H}(\alpha, b, \xi)$, *удовлетворяющее соотношению* (24) *при* $v = = q_{\alpha_0\xi_0}$, *что при любом* $t \in [a, b]$ *выполняется оценка*

$$|x_{\alpha\xi\eta}(t) - x_{\alpha_0\xi_0}(t)| \leqslant \zeta(\varkappa_0(\cdot, \xi), \eta, \gamma)(t), \tag{25}$$

и при почти всех $t \in [a, b]$ *справедливо соотношение*

$$|q_{\alpha\xi\eta}(t) - q_{\alpha_0\xi_0}(t)| \leqslant \varkappa_0(t, \xi) + \eta + \widetilde{N}(\zeta(\varkappa_0(\cdot, \xi), \eta, \gamma), \xi)(t), \tag{26}$$

где $\zeta(\varkappa_0(\cdot, \xi), \varepsilon, \gamma)$ *— верхнее решение задачи* (23), $\gamma = |\alpha_0 - \alpha|$.

§3. Непрерывная зависимость фазовых траекторий от параметров и начальных условий

Следующая теорема выражает необходимое условие корректности управляемой импульсной системы (1)–(3).

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любых последовательностей* $\alpha^i \in B_{\mathbb{R}^n}(\alpha_0, \delta)$, $\xi_i \in B_{\Xi}(\xi_0, \delta)$ $i = 1, 2, \ldots$, $\alpha^i \to \alpha_0$ *в* $\mathbb{R}^n$, $\xi_i \to \xi_0$ *в* Ξ *при* $i \to \infty$, *выполняется*

1) *для любого* $\widetilde{y} \in \widetilde{H}(\alpha_0, b, \xi_0)$, *найдется такая последовательность* $y_i \in \widetilde{H}(\alpha^i, b, \xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, *что* $y_i \to \widetilde{y}$ *в пространстве* $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ *при* $i \to \infty$;

2) *если отображение* $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathrm{conv}[\mathbb{R}^l]$, *то для любой последовательности* $y_i \in \widetilde{H}(\alpha^i, b, \xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, *имеющей предел* $\widehat{y}$ *в пространстве* $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ *при* $i \to \infty$, *найдется такая последовательность* $\widehat{y}_i \in \widetilde{H}(\alpha_0, b, \xi_0)$, $i = 1, 2, \ldots$, *что* $\widehat{y}_i \to \widehat{y}$ *в пространстве* $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ *при* $i \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем первую часть теоремы, т. е. покажем, что отображение $(\alpha, \xi) \to \widetilde{H}(\alpha, b, \xi)$ полунепрерывно снизу. Для этого надо показать, что для любого $\widetilde{y} \in \widetilde{H}(\alpha_0, b, \xi_0)$ и любых последовательностей $\alpha^i \to \alpha_0$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $\xi_i \to \xi_0$ в пространстве Ξ при $i \to \infty$ найдется такая последовательность $y_i \in \widetilde{H}(\alpha^i, b, \xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, что $y_i \to \widetilde{y}$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ при $i \to \infty$.

Так как множество всех фазовых траекторий управляемой импульсной системы (1), (2) априорно ограничено в точке $(\alpha_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$, то $\widetilde{H}(\alpha_0, b, \xi_0) \neq \varnothing$.

Возьмем $\widetilde{y} \in \widetilde{H}(\alpha_0, b, \xi_0)$ и последовательность $\alpha^i \to \alpha_0$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\xi_i \to \xi_0$ в пространстве Ξ при $i \to \infty$ такие, что $\alpha^i \in B_{\mathbb{R}^n}(\alpha_0, \varepsilon)$, $\xi_i \in B_{\Xi}(\xi_0, \varepsilon)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Так как $\widetilde{y} \in \widetilde{H}(\alpha_0, b, \xi_0)$, то при всех $t \in [a, \tau]$ справедливо равенство

$$\widetilde{y}(t) = \alpha_0 + \int_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^m J_k(\widetilde{y}(t_k), \xi)\chi_{(t_k, b]}(t), \tag{27}$$

где функция $q \in N(P_b\widetilde{y}, G_b\widetilde{y}, \xi_0)$, здесь $N : \mathbf{L}^n_\infty[a, b] \times \mathbf{L}^n_\infty[a, b] \times \Xi \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a, b])$ — оператор Немыцкого заданный соотношением (16), операторы $P_b : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \mathbf{L}^n_\infty[a, b]$, $G_b : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \mathbf{L}^n_\infty[a, b]$ определены при $\tau = b$ равенствами (4), (5) соответственно.

Так как $\widetilde{y} \in \widetilde{H}(\alpha_0, b, \xi_0)$, то из (27) следует, что для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a,b]$ справедливо равенство

$$\rho_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}[q, N(P_b\widetilde{y}, G_b\widetilde{y}, \xi_0)] = 0, \tag{28}$$

поэтому функция $\widetilde{y} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет неравенству (24). Из априорной ограниченности множества $\widetilde{H}(\alpha_0, b, \xi_0)$ в точке $(\alpha_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$, по теореме 1, следует, что для любого $\tau \in (a,b]$ существует такое $\varepsilon > 0$, что множество фазовых траекторий управляемой импульсной системы $(1)-(3)$ априорно ограничено в совокупности на множестве $B_{\mathbb{R}^n}(\alpha_0, \varepsilon) \times B_{\Xi}(\xi_0, \varepsilon)$. Согласно [5], для всякого $\tau \in (a,b]$ множество $\widetilde{H}(\alpha^i, \tau, \xi_i) \neq \varnothing$. Значит $\widetilde{H}(\alpha^i, b, \xi_i) \neq \varnothing$.

По теореме 2 при каждом фиксированном $i = 1, 2, \ldots$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего неравенству $\varepsilon < \delta$ и любого $\xi_i \in V_{\Xi}(\xi_0, \varepsilon)$ найдется такое решение $y_i \in \widetilde{H}(\alpha^i, b, \xi_i)$, что при любом $t \in [a,b]$ выполняется оценка

$$|y_i(t) - \widetilde{y}(t)| \leqslant \zeta(\varkappa(\cdot, \xi_i), \varepsilon, \gamma)(t), \tag{29}$$

где $\zeta(\varkappa(\cdot, \xi_i), \varepsilon, \gamma)$ — верхнее решение задачи (22).

Отметим, что согласно определению функции $\varkappa_0 : [a,b] \times \Xi \to \mathbb{R}^1_+$ (см. (21)) при почти всех $t \in [a,b]$ $\varkappa_0(t, \xi_0) = 0$. Поэтому из (21) следует, что при $i \to \infty$

$$\varkappa(t, \xi_i) \to 0. \tag{30}$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{i}$, тогда, согласно (30), задача (22) примет вид

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{i} + \widetilde{N}(z, \xi_i), \quad \Delta(z(t_k)) = \widetilde{J}_k(z(t_k), \xi_i), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad z(a) = \gamma. \tag{31}$$

В силу определения оператора $\widetilde{N} : \widetilde{\mathbf{C}}_+{}^1[a,b] \times \Xi \to \mathbf{L}_+{}^1[a,b]$ (см. (18)) при $i \to \infty$ задача (31) примет вид (15). По свойству $\mathcal{D}$ задача (15) в точке $\xi_0 \in \Xi$ имеет только нулевые локальные решения (см. определение 3). При $i \to \infty$ $\xi_i \to \xi_0$ в пространстве Ξ, тогда из определения оператора $\widetilde{N} : \widetilde{\mathbf{C}}_+{}^1[a,b] \times \Xi \to \mathbf{L}_+{}^1[a,b]$ (см. (18)) следует, что при $i \to \infty$ локальные решения задачи (31) стремятся к нулю. Поэтому верхнее решение задачи (31) $\zeta(\varkappa(\cdot, \xi_i), \varepsilon, \gamma) \to 0$ при $i \to \infty$. Из (29) следует, что при всех $t \in [a,b]$

$$|y_i(t) - \widetilde{y}(t)| \to 0 \tag{32}$$

при $i \to \infty$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, следовательно $y_i(t) \to \widetilde{y}(t)$ в $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ при $i \to \infty$. Таким образом, отображение $(\alpha, \xi) \to \widetilde{H}(\alpha, b, \xi)$ полунепрерывно снизу.

Теперь докажем вторую часть теоремы, т. е. покажем, что отображение $(\alpha, \xi) \to \widetilde{H}(\alpha, b, \xi)$ полунепрерывно сверху.

Пусть $y_i \in \widetilde{H}(\alpha^i, b, \xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, тогда для любого $i = 1, 2, \ldots$ и при всех $t \in [a,b]$ справедливо равенство

$$y_i(t) = \alpha^i + \int\limits_a^t q_i(s)ds + \sum_{k=1}^m J_k(y_i(t_k), \xi)\chi_{(t_k, b]}(t), \tag{33}$$

где $q_i \in N(P_b y_i, G_b y_i, \xi_i)$. И пусть $y_i \to \widehat{y}$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ при $i \to \infty$.

Зафиксируем $i = 1, 2, \ldots$. Согласно (33) функции $y_i : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют неравенству (24) при каждом $i = 1, 2, \ldots$. Так как множество $\widetilde{H}(\alpha_0, b, \xi)$ априорно ограничено в точке $(\alpha_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$ и для отображений $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \Xi \to \mathbb{R}^n$, $U : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times$ $\times\, \Xi \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^l]$ и импульсных воздействий $J_k : \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots, m,$ выполняется свойство $\mathcal{D}$ в точке $\xi_0 \in \Xi$, то, согласно теореме 2 при каждом фиксированном $i = 1, 2, \ldots$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего неравенству $\varepsilon < \delta$ и $\xi_0 \in \Xi$ найдется такое решение $\widehat{y}_i \in \widetilde{H}(\alpha_0, b, \xi_0)$, что при любом $t \in [a, b]$ выполняется оценка

$$|\widehat{y}_i(t) - y_i(t)| \leqslant \zeta(\varkappa(\cdot, \xi_0), \varepsilon, \gamma)(t), \tag{34}$$

где $\zeta(\varkappa(\cdot, \xi_0), \varepsilon, \gamma)$ — верхнее решение задачи (22). Пусть $\varepsilon = \frac{1}{i}$. Так как $\varkappa(t, \xi_0) = 0$ (см. (21)), $\widetilde{J}_k(z(t_k), \xi_0) = 0$ (по свойству $\mathcal{D}$), то в силу определения оператора $\widetilde{N} : \widetilde{\mathbf{C}}_+{}^1[a, b] \times \Xi \to \mathbf{L}_+{}^1[a, b]$ (см. (18)) решения задачи (22) при достаточно больших i совпадает с решениями задачи (15). По свойству $\mathcal{D}$ задача (15) в точке $\xi_0 \in \Xi$ имеет только нулевые локальные решения. Поэтому верхнее решение задачи (22) $\zeta(\varkappa(\cdot, \xi_0), \varepsilon, \gamma) \to 0$ при $i \to \infty$. Из (34) следует, что при всех $t \in [a, b]$ $|\widehat{y}_i(t) - y_i(t)| \to 0$ при $i \to \infty$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, следовательно $\widehat{y}_i(t) \to y_i(t)$ в $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ при $i \to \infty$. Так как $y_i \to \widehat{y}$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ при $i \to \infty$, то имеем, что $\widehat{y}_i \to \widehat{y}$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ при $i \to \infty$. Таким образом, отображение $(\alpha, \xi) \to \widetilde{H}(\alpha, b, \xi)$ полунепрерывно сверху. Теорема доказана.

Следует отметить, что кроме теоретического интереса, эта теорема имеет и прикладное значение, связанное с корректностью математических моделей реальных процессов. Действительно, в связи с тем, что в прикладных задачах параметры модели могут быть найдены лишь приближенно, важным свойством, обеспечивающим применимость модели, является ее корректность. Теорема 3 устанавливает связь с известными для обыкновенных дифференциальных уравнений результатами J. Kurzweil – Z. Vorel, М.Ф. Бокштейна, Н.Н. Петрова, Е.С. Жуковского и других авторов (см., например, [9–11]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194-252.

2. *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестник МГУ. Серия: Математика, механика. 1959. № 2. С. 25-32.

3. *Булгаков А.И., Филиппова О.В.* Импульсные функционально-дифференциальные включения. Исследование импульсного функционально-дифференциального включения с невыпуклой по переключению правой частью. Сарбрюкхен, Германия (Saarbrücken, Germany): Lambert, 2014. 127 с.

6. *Булгаков А.И., Филиппова О.В.* Импульсные функционально-дифференциальные включения с отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2014. № 1 (43). С. 3-48.

7. *Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В.* Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Части 1–6 // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 6. С. 1256-1302.

8. *Канторович Л.В., Акилов Г.Н.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

9. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.

10. *Ченцов А.Г.* Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2010.

11. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523-1537.

12. *Жуковский Е.С.* Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра // Математический сборник. 2006. Т. 197. № 10. С. 33-56.

13. *Курцвейль Я., Ворель З.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Чехословацкий математический журнал. 1957. Вып. 7. № 4. С. 568-583.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00877) в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 2014/285).

Поступила в редакцию 13 мая 2015 г.

Filippova O.V. ABOUT WELL-POSEDNESS OF A CONTROLLABLE IMPULSE SYSTEM WITH DELAY AND WITH PHASE CONSTRAINTS ON CONTROL

A controllable impulse system with delay and with phase constraints on control is considered. It is shown that if at some point of parameter the set of the system phase trajectories is a-priori bounded, then it is a-priori bounded for all parameter values from some neighborhood of this point. The deviation estimates of the phase trajectories set from a given function are obtained in the space of piecewise continuous functions. The continuous dependence of phase trajectories on parameters and on the initial data is derived.

Key words: controllable impulse system with delay; differential inclusion; a-priori boundedness in total on a set.

Филиппова Ольга Викторовна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

Filippova Olga Viktorovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Algebra and Geometry Department, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

УДК 517.977

ОБ АСИМПТОТИКАХ ЦЕН В ДИНАМИЧЕСКИХ ИГРАХ С ПЛАТЕЖОМ, УСРЕДНЕННЫМ ПО БОЛЬШОМУ ПРОМЕЖУТКУ

© **Д.В. Хлопин**

Ключевые слова: динамические игры; среднее по Абелю; среднее по Чезаро; бесконечный промежуток; дисконтирование; принцип динамического программирования; асимптотическая цена; вероятностное распределение.

В работе исследуются асимптотики цен для антагонистических динамических играх с платежами, усредненными по времени в силу заданного направленного семейства вероятностных распределений (в том числе равномерные распределения на все больших промежутках и экспоненциальные распределения с все меньшим параметром дисконтирования). Исследуются условия как на игру, так и на возможные семейства распределений, при которых асимптотика цен не зависит от выбора семейства.

Рассмотрим два семейства интегралов:

$$\lambda\int_0^{\frac{1}{\lambda}} g(t)\,dt \quad \text{(среднее по Чезаро)}, \qquad \lambda\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} g(t)\,dt \quad \text{(среднее по Абелю)}.$$

Как было показано Феллером (а для последовательностей еще Харди) для всякой ограниченной функции g, если одно из выражений имеет предел (при $\lambda \downarrow 0$), то такой предел имеет место и для другого выражения, и эти пределы совпадают. Такого рода асимптотические результаты называют тауберовыми теоремами

Можно поставить вопрос о равенстве асимптотик и в теории управления, в том числе для антагонистических игр. Пусть имеется некоторая динамическая система, движение которой определяют один (задача управления) или два (антагонистическая игра) игрока. Пусть для