

УДК 543.4+544.2

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ О СМЕШАННЫХ ФОРМАХ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

© М.В. Макаров, И.Б. Бадриев, В.Н. Паймушин

Ключевые слова: трехслойная пластина; геометрическая нелинейность; трансверсально-мягкий наполнитель; итерационный метод.

Рассмотрены одномерные геометрически нелинейная и линеаризованная задачи о смешанных формах потери устойчивости внешних слоев трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем, находящейся в условиях торцевого сжатия силой, приложенной к одному из внешних слоев. Для решения задач предложены итерационные методы. Методы реализованы численно. Проанализированы результаты расчетов для модельных задач.

Создание изделий авиационной и космической техники, судостроения, строительства в настоящее время неразрывно связано с применением новых конструкционных материалов, в частности, трехслойных конструкций. Применение в качестве наполнителя материалов с низкими массовыми характеристиками позволяет при сравнительно небольшом увеличении веса конструкции существенно повысить изгибную жесткость. Кроме того, трехслойные конструкции позволяют обеспечить хорошие звуко- и теплоизолирующие свойства [1]. Такие конструкции нашли широкое применение в качестве несущих и управляющих поверхностей летательных аппаратов, обтекателей, теплозащитных и силовых экранов, разного рода панелей и др. Отметим, что в работах [2-6] рассматривались задачи теории мягких оболочек, а также методы их решения. В [7] предлагается приближенный метод нахождения критической силы и формы прогиба стержня, сжатого осевой силой и имеющего начальный прогиб.

В настоящей работе рассматриваются одномерные геометрически нелинейные задачи о смешанных формах потери устойчивости внешних слоев трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем при торцевом осевом сжатии одного из внешних слоев. При таком нагружении пластина оказывается в условиях продольно-поперечного изгиба, одной из возможных причин её разрушения является реализация форм потери устойчивости [1]. В уточненной постановке [2, 3] задача о геометрически нелинейном деформировании пластины описывается системой пяти обыкновенных дифференциальных уравнений относительно поперечных касательных напряжений в наполнителе, постоянных по его толщине, осевых перемещений и прогибов несущих слоев:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT_{(1)}^{11}}{dx} + X_{(1)}^1 + q^1 = 0, \\ \frac{dT_{(2)}^{11}}{dx} + X_{(2)}^1 - q^1 = 0, \\ \frac{dS_{(1)}^1}{dx} + c_3 (w^{(2)} - w^{(1)}) + X_{(1)}^3 = 0, \\ \frac{dS_{(2)}^1}{dx} - c_3 (w^{(2)} - w^{(1)}) + X_{(2)}^3 = 0, \\ u^{(1)} - u^{(2)} - H_{(1)} \frac{dw^{(1)}}{dx} - H_{(2)} \frac{dw^{(2)}}{dx} + \frac{2h}{G_{13}} q^1 - \frac{2h^3}{3E_3} \frac{d^2 q^1}{dx^2} = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 < x < a, \\ 0 < x < a, \end{array} \quad (1)$$

где a — длина пластины, $2h$ — толщина заполнителя, $H_{(k)} = h + h_{(k)}$, $2h_{(k)}$ — толщина k -го слоя, $T_{(k)}^{11}$ — мембранные усилия в k -м слое, $X_{(k)}^1, X_{(k)}^3$ — компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k -го слоя, $w^{(k)}$ — прогибы точек срединной поверхности k -го слоя, $u^{(k)}$ — осевые перемещения точек срединной поверхности k -го слоя, $M_{(k)}^{11}$ — внутренние изгибающие моменты k -го слоя, $S_{(k)}^1$ — обобщенные перерезывающие силы в k -м слое, G_{13}, E_3 — модули поперечного сдвига и обжатия заполнителя, q^1 — касательные напряжения в заполнителе,

$$S_{(k)}^1 = \frac{dM_{(k)}^{11}}{dx} + T_{(k)}^{11} \omega^k + M_{(k)}^1 - H_{(k)} q^1, \quad k = 1, 2,$$

$$T_{(k)}^{11} = B_{(k)} \left(\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\omega^{(k)} \right)^2 \right), \quad k = 1, 2,$$

$$M_{(k)}^{11} = -D_{(k)} \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2}, \quad \omega^{(k)} = \frac{dw^{(k)}}{dx}, \quad k = 1, 2,$$

$B_{(k)} = 2 h_{(k)} E^{(k)} / (1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)})$ — жесткость k -го слоя на растяжение–сжатие, $E^{(k)}$ — модуль упругости первого рода k -го несущего слоя, $D_{(k)} = B_{(k)} h_{(k)}^2 / 3$ — изгибная жесткость k -го слоя, $c_3 = E_3 / (2h)$, $\omega^{(k)}$ — углы поворотов нормалей к срединной поверхности k -го слоя, $M_{(k)}^1$ — компоненты вектора поверхностных моментов, $\nu_{12}^{(k)}, \nu_{21}^{(k)}$ — коэффициенты Пуассона материала k -го слоя.

Предполагаем, что края несущих слоев шарнирно оперты на абсолютно жесткие в поперечном направлении диафрагмы.

Для решения геометрически нелинейной задачи (1) предварительно с помощью метода сумматорных тождеств [4] построена разностная схема. Для ее решения используется предложенный в [5] двухслойный итерационный процесс с опусканием нелинейности на нижний слой, позволяющий определить поля напряжений, деформаций и перемещений только в возможных устойчивых положениях равновесия.

В работе [5] найдены докритические значения указанных параметров. При этом в процессе табулирования по торцевой осевой нагрузке, участвующей в динамическом граничном условии, итерационный метод перестает сходиться в окрестности некоторого значения (бифуркационного) нагрузки. При этом интерес представляет задача определения полей напряжений, деформаций и перемещений в неустойчивых положениях равновесия в окрестности бифуркационного значения нагрузки. Для решения такой задачи предложена схема метода продолжения решения по параметру. Основная идея метода заключается в следующем. Предположим, что некоторая форма равновесия системы известна (она может быть найдена в соответствии с методом, изложенном в [5]). И нужно выйти в неустойчивое положение равновесия путем перехода через предельную точку, очевидно, что используя метод последовательных нагружений невозможно перейти через предельную точку и достигнуть неустойчивого положения равновесия, поскольку нельзя выйти на ветвь решения, когда приращение функции табулируемого параметра меняет знак. Поэтому необходимо выбрать другой параметр табулирования в момент приближения к окрестности бифуркационного значения нагрузки. В качестве такого параметра предлагается принимать величину работы внешних сил в силу её строгого возрастания. При этом к исходной системе обыкновенных дифференциальных уравнений добавляется дополнительное уравнение, представляющее собой выражение для вычисления работы внешних сил. Так как известна докритическая форма равновесия (докритические значения характеристик напряженно-деформированного состояния), то при использовании схемы продолжения по параметру указанные докритические характеристики считаются известными функциями, а новыми неизвестными задачи

являются приращения функций, относительно которых формулируется исходная задача, и приращение работы внешних сил.

В среде Matlab для численной реализации итерационного метода был разработан комплекс программ. Для модельной задачи проведены численные эксперименты. Итерационный параметр подбирался эмпирически. Вычисления проводились до тех пор, пока норма невязки оставалась больше заданной точности. Путем табуляции по работе внешних сил

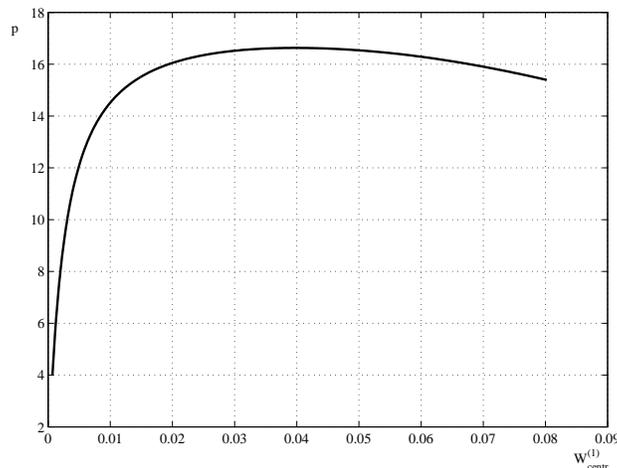


Рис. 1:

отслеживалось поведение нагрузки и прогибов в центральной части точке несущего слоя. Найдена критическая нагрузка, после прохождения которой при уменьшающейся внешней нагрузке прогибы продолжали возрастать (см. рис. 1, на котором представлена зависимость величины торцевой нагрузки p от прогиба w^1 в несущем слое, к которому приложена эта нагрузка, в центральной точке). Установлено, что в результате использования трех подходов – решения геометрически нелинейной задачи методом продолжения по параметру (работе внешних сил), решения линеаризованной задачи в окрестности решения нелинейной задачи (фактически – квадратичной задачи на собственные значения), а также решения геометрически нелинейной задачи путем введения параметра кинематического нагружения получаются практически одинаковые значения критической нагрузки. Анализ результатов численных экспериментов позволил установить, что, используя метод продолжения по параметру, можно исследовать напряженно-деформированное состояние пластины в неустойчивых положениях равновесия, то есть в окрестности бифуркационного значения нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. О взаимодействии композитной пластины, имеющей вибропоглощающее покрытие, с падающей звуковой волной // Известия ВУЗов. Математика. 2015. № 3. С. 75–82.
2. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. Обобщенная постановка задачи о равновесии мягкой биологической оболочки // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2447–2449.
3. Badriev I.B., Zadvornov O.A., Saddek A.M. Convergence analysis of iterative methods for some variational inequalities with pseudomonotone operators // Differential Equations. 2001. V. 37. № 7. P. 934–942.
4. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 8. С. 1115–1122.
5. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения // Известия высших учебных заведений. Математика. 2005. № 1. С. 25-30.

6. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование сходимости итерационного процесса для уравнений с вырождающимися операторами // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. № 7. С. 898–901.
7. Шарафутдинова Г.Г. Приближенные методы решения задачи о формах потери устойчивости стержня, имеющего начальный прогиб // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2743–2745.
8. Паймушин В.Н. Теория устойчивости трехслойных пластин и оболочек (этапы развития, современное состояние и направления дальнейших исследований) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2001. № 2. С. 148–162.
9. Paimushin V.N. Nonlinear theory of the central bending of three-layer shells with defects in the form of sections of bonding failure // Soviet Applied Mechanics. 1987. V. 23. № 11. P. 1038–1043.
10. Paimushin V.N., Bobrov S.N. Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms // Mechanics of composite materials. 2000. V. 36. № 1. P. 59–66.
11. Карчевский М.М., Ляшко А.Д. Разностные схемы для нелинейных задач математической физики. Казань: Изд-во Казанского университета, 1976. 156 с.
12. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное решение задачи о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем в геометрически нелинейной постановке // Вестник Казанского технологического университета. 2014. Т. 17. № 23. С. 393–396.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена за счёт средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности и при финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-41-02569, 15-38-21099).

Поступила в редакцию 1 июня 2015 г.

Makarov M.V., Badriev I.B., Paimushin V.N. NONLINEAR PROBLEMS ON MIXED BUCKLING OF SANDWICH PLATE UNDER LONGITUDINAL-TRANSVERSE BENDING

One-dimensional geometrically nonlinear and linearized problems on mixed buckling of the external layers sandwich plate with a transversely soft filler, located in a mechanical compression force acting on one of the external layers, are considered. To solve the problems, iterative methods are proposed. These methods are implemented numerically. The results of calculations for the model problems are analyzed.

Key words: sandwich plate; geometric nonlinearity; transversely soft filler; iterative method.

Макаров Максим Викторович, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева (КНИТУ-КАИ), г. Казань, Российская Федерация, аспирант кафедры прочности конструкций, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, младший научный сотрудник, e-mail: makarovmaksim@mail.ru

Makarov Maksim Viktorovich, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Junior Researcher, e-mail: makarovmaksim@mail.ru

Бадриев Ильдар Бурханович, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, e-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

Badriev Ildar Burkhanovich, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Computing Mathematics Department, e-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

Паймушин Виталий Николаевич, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева (КНИТУ-КАИ), г. Казань, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прочности конструкций, главный научный сотрудник, e-mail: vpaismushin@mail.ru

Paimushin Vitalii Nikolaevich, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev, Kazan, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Structural Strength Department, Chief Researcher, e-mail: vpaismushin@mail.ru