2. *Иванов Д.В., Кацюба О.А.* О Состоятельности оценок параметров ARX систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале // Стохастическая оптимизация в информатике. 2013. Т. 9. № 2. С. 21-32.

3. *Иванов Д.В.* Оценивание параметров линейных ARX-систем дробного порядка с помехой наблюдения во входном сигнал // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 43-50.

4. *Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М.: Наука, 1991. 215 с.

5. *Ljung L.* Analysis of recursive stochastic algorithm // IEEE Trans. Aut. Control. 1977. V.AC-22. № 4. P. 551-575.

Поступила в редакцию 10 июня 2015 г.

Ivanov D.V., Salugin I.E. RECURSIVE IDENTIFICATION OF LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS OF FRACTIONAL ORDER WITH NOISE OUTPUT SIGNAL

In this paper, we propose a recursive algorithm based on stochastic approximation method for estimating the parameters of linear dynamic systems with differences of fractional order in the presence of noise of observation in the output signal. Prove the strong consistency, the resulting estimates, subject to the constraints that do not require knowledge of the distribution of noise.

Key words: recursive identification; least squares method; the difference of fractional order; model output error; stochastic approximation.

Иванов Дмитрий Владимирович, Самарский государственный университет путей сообщения, г. Самара, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры мехатроники в автоматизированных производствах, e-mail: dvi85@list.ru

Ivanov Dmitrii Vladimirovich, Samara State University of Transport Communications, Samara, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mechatronics in Automated Production Department, e-mail: dvi85@list.ru

Салугин Иван Евгеньевич, Самарский государственный университет путей сообщения, г. Самара, Российская Федерация, аспирант кафедры мехатроники в автоматизированных производствах, e-mail: salugin@yandex.ru

Salugin Ivan Evgenievich, Samara State University of Transport Communications, Samara, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Mechatronics in Automated Production Department, e-mail: salugin@yandex.ru

УДК 517.254

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ ПО ВХОДУ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАЗНОСТЯМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ НАБЛЮДЕНИЙ

© Д.В. Иванов, И.Р. Ширинов

Ключевые слова: параметрическая идентификация; метод наименьших квадратов; разность дробного порядка; разностные уравнения.

Предложен алгоритм, являющийся обобщением метода наименьших квадратов, который позволяет получать сильно состоятельные оценки параметров линейных динамических систем с разностями дробного порядка при наличии помех наблюдения во входных и выходном сигналах в условиях отсутствия информации о законе распределения помех.

Аппарат дробного математического анализа имеет множество приложений, таких как теория вязкоупругости, теория хаоса, фракталы, для описания диэлектрических материалов, электрохимических процессов, траффика в компьютерных сетях, теория автоматического управления. Достаточно часто модели таких процессов приходится строить по результатам наблюдений. Поэтому развитие методов идентификации непрерывных и дискретных систем дробного порядка является актуальной задачей. В настоящее время активно развиваются методы параметрической идентификации динамических систем, описываемых уравнениями с разностями дробного порядка. В [1, 2] предложен метод оценивания динамической системы с помехой в выходном сигнале, обобщение метода на ARX (Autoregressive with exogenous input) систему дробного порядка с помехой в выходном сигнале дано в [3].

В данной статье дано обобщение результатов [3] на случай многомерной по входу линейной динамической системы дробного порядка с помехами во входных и выходных сигналах. Доказана сильная состоятельность, получаемых оценок параметров многомерных по входу линейных динамических систем дробного порядка при помехах класса мартингал-разность.

Постановка задачи. Рассмотрим линейную динамическую систему, описываемую следующими стохастическими уравнениями с дискретным временем $i = ... - 1, 0, 1, ...$:

$$z_i = \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{k=1}^{d} \sum_{m=1}^{r_1^{(k)}} a_0^{(mk)} \Delta^{\beta_m^{(k)}} x_i^{(k)}, y_i = z_i + \xi_i, w_i^{(k)} = x_i^{(k)} + \zeta_i^{(k)}, \tag{1}$$

где $0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_r$, $0 < \beta_1^{(k)} \ldots < \beta_{r_1}^{(k)}$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$, $k = \overline{1, d}$,

$\Delta^{\alpha_m} z_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_m \\ j \end{pmatrix} z_{i-j}, \Delta^{\beta_m^{(k)}} x_i^{(k)} = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_m^{(k)} \\ j \end{pmatrix} x_{i-j}^{(k)},$

$\begin{pmatrix} \alpha_m \\ j \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\alpha_m+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha_m-j+1)}, \begin{pmatrix} \beta_m^{(k)} \\ j \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\beta_m^{(k)}+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta_m^{(k)}-j+1)},$

z_i , y_i – ненаблюдаемая и наблюдаемая выходные переменные;

$x_i, w_i^{(k)}$ – ненаблюдаемая и наблюдаемая входные переменные;

$\xi_i, \zeta_i^{(k)}$ – помеха наблюдения в выходном и во входном сигнале;

Предположим, что выполняются следующие условия:

1. Множество $\tilde{\mathrm{B}} \subset \mathbb{R}^{r+r_1^{(1)}+\ldots+r_1^{(d)}}$, которому априорно принадлежат истинные значения параметров b_0 , a_0 устойчивой динамической системы является компактом.

2. Случайные процессы $\{\xi_i\}$, $\left\{\zeta_i^{(k)}\right\}$ являются мартингал-разностями и удовлетворяют следующим условиям:

$E\left(\xi_{i+1}/F_\xi^{(i)}\right) = 0$, $E\left(\zeta_{i+1}^{(k)}/F_\zeta^{(ik)}\right) = 0$ п.н.,

$E\left(\left(\xi_{i+1}\right)^2/F_\xi^{(i)}\right) < W_\xi$, $E\left(\left(\zeta_{i+1}^{(k)}\right)^2/F_\zeta^{(ik)}\right) < W_\zeta^{(k)}$ п.н.

$E\left(\xi_i^4\right) < \infty, E\left(\xi_i^2\right) < \infty, E\left(\left(\zeta_i^{(k)}\right)^4\right) < \infty, E\left(\left(\zeta_i^{(k)}\right)^2\right) < \infty,$

где $F_\xi^{(i)}, F_\zeta^{(ik)}$ — σ-алгебры, индуцированные семействами случайных величин $\left\{\xi_t, \zeta_t^{(k)}, t \in T_i\right\}, T_i = \{\mathrm{t}; \mathrm{t} \leqslant \mathrm{i}, \mathrm{t} \in \mathrm{Z_c}$-множество целых чисел$\}$,

$W_\xi, W_\zeta^{(k)}$ – случайные величины с $E\left(W_\xi\right) < \infty$, $E\left(W_\zeta^{(k)}\right) < \infty$ п.н.

3. $\{x_i^{(k)}\}$ статистически не зависит от $\{\xi_i\}$, $\left\{\zeta_i^{(k)}\right\}$.

4. $\{\xi_i\}$, $\left\{\zeta_i^{(k)}\right\}$ статистически не зависят между собой.

5. Помехи $\{\xi_i\}$, $\left\{\zeta_i^{(k)}\right\}$ и параметры системы α_m, $\beta_m^{(k)}$ удовлетворяют условиям:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}\varphi_\xi^{(i)}\left(\varphi_\xi^{(i)}\right)^T\right]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}E\left(\varphi_\xi^{(i)}\left(\varphi_\xi^{(i)}\right)^T\right)\right]=$$

$$=\begin{pmatrix} h_\xi^{(11)} & \dots & h_\xi^{(r1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_\xi^{(1r)} & \dots & h_\xi^{(rr)} \end{pmatrix}=H_\xi,$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}\varphi_\zeta^{(ik)}\left(\varphi_\zeta^{(ik)}\right)^T\right]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}E\left(\varphi_\zeta^{(ik)}\left(\varphi_\zeta^{(ik)}\right)^T\right)\right]=$$

$$=\begin{pmatrix} h_\zeta^{(11k)} & \dots & h_\zeta^{(r_11k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_\zeta^{(1r_1k)} & \dots & h_\zeta^{(r_1r_1k)} \end{pmatrix}=H_\zeta^{(k)},$$

где $\varphi_\xi^{(i)}=\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\begin{pmatrix}\alpha_1\\ j\end{pmatrix}\xi_{i-j-1},\dots,\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\begin{pmatrix}\alpha_r\\ j\end{pmatrix}\xi_{i-j-1}\right)^T$,

$\varphi_\zeta^{(ik)}=\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\begin{pmatrix}\beta_1^{(k)}\\ j\end{pmatrix}\zeta_{i-j}^{(k)},\dots,\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\begin{pmatrix}\beta_{r_1^{(k)}}^{(k)}\\ j\end{pmatrix}\zeta_{i-j}^{(k)}\right)^T$,

причем H_ξ, $H_\zeta^{(k)}$ положительно определены.

6. Входной сигнал $x_i^{(k)}$ является случайным процессом с $E\left(x_i^{(k)}\right)=0$, $E\left(\left(x_i^{(k)}\right)^2\right)=$ $=\left(\sigma_x^{(k)}\right)^2<\infty$ и истинные значения параметров b_0, a_0 удовлетворяют условию

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T\middle|\left(\varphi_x^{(i1)}\right)^T\middle|\dots\middle|\left(\varphi_x^{(id)}\right)^T\right)^T\left(\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T\middle|\left(\varphi_x^{(i1)}\right)^T\middle|\dots\middle|\left(\varphi_x^{(id)}\right)^T\right)=$$

$=H$ п.н.,

где $\varphi_z^{(i)}=\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\begin{pmatrix}\alpha_1\\ j\end{pmatrix}z_{i-j-1},\dots,\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\begin{pmatrix}\alpha_r\\ j\end{pmatrix}z_{i-j-1}\right)^T$,

$\varphi_x^{(ik)}=\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\begin{pmatrix}\beta_1^{(k)}\\ j\end{pmatrix}x_{i-j}^{(k)},\dots,\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\begin{pmatrix}\beta_{r_1^{(j)}}^{(k)}\\ j\end{pmatrix}x_{i-j}^{(k)}\right)^T$,

причем H существует, ограничена и положительно определена.

Требуется определять оценки неизвестных коэффициентов динамической системы описываемой уравнением (1) по наблюдаемым последовательностям $y_i, w_i^{(k)}$ при известных порядках r, $r_1^{(k)}$, α_m, $\beta_m^{(k)}$ определить оценки истинных значений параметров.

Система (1) может быть записана как линейная регрессия

$$y_i=\varphi_i^T\theta_0+\varepsilon_i, \tag{2}$$

где $\varphi_i=\left(\left(\varphi_y^{(i)}\right)^T\middle|\left(\varphi_w^{(i)}\right)^T\right)^T$, $\varphi_w^{(i)}=\left(\varphi_w^{(i1)}\middle|\varphi_w^{(i2)}\middle|\dots\middle|\varphi_w^{(id)}\right)^T$,

$\varphi_y^{(i)}=\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\begin{pmatrix}\alpha_1\\ j\end{pmatrix}y_{i-j-1},\dots,\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\begin{pmatrix}\alpha_r\\ j\end{pmatrix}y_{i-j-1}\right)^T$,

$$\varphi_w^{(ik)} = \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_1^{(k)} \\ j \end{pmatrix} w_{i-j}^{(k)}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_{r_1^{(k)}}^{(k)} \\ j \end{pmatrix} w_{i-j}^{(k)} \right)^T,$$

$$\theta_0 = \left(\; b_0^T \; \middle| \; a_0^T \; \right)^T, b_0 = \left(b_0^{(1)}, \ldots, b_0^{(r)} \right)^T, a_0 = \left(\; a_0^{(1)} \; \middle| \; \ldots \; \middle| \; a_0^{(d)} \; \right)^T,$$

$$a_0^{(k)} = \left(a_0^{(0k)} \ldots a_0^{\left(r_1^{(k)} k\right)} \right)^T, \varepsilon_i = \xi_i^{(1)} - b_0^T \varphi_\xi^{(i)} - \sum_{k=1}^{d} \left(a_0^{(k)} \right)^T \varphi_\zeta^{(ik)},$$

$$\varphi_\xi^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ j \end{pmatrix} \xi_{i-j-1}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_r \\ j \end{pmatrix} \xi_{i-j-1} \right)^T,$$

$$\varphi_\zeta^{(ik)} = \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_1^{(k)} \\ j \end{pmatrix} \zeta_{i-j}^{(k)}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_{r_1^{(k)}}^{(k)} \\ j \end{pmatrix} \zeta_{i-j}^{(k)} \right)^T.$$

Определим оценку $\hat{\theta}(N)$ неизвестных параметров θ_0 из условия минимума суммы взвешенных квадратов обобщённых ошибок $(\varepsilon_i(b,a,i))^2$:

$$\min_{\theta \in \tilde{\mathrm{B}}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(y_i - \varphi_i^T \theta \right)^2}{\bar{\sigma}_\xi^2 + b^T H_\xi b + \sum_{k=1}^{d} \left(a^{(k)} \right)^T H_\zeta^{(k)} a^{(k)}}. \tag{3}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть некоторый случайный процесс* $\{y_i, i = \ldots -1, 0, 1, \ldots\}$ *описывается уравнением (1) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1–6. Тогда оценка* $\hat{\theta}(N)$ *, определяемая выражением (3) с вероятностью 1 при* $N \to \infty$ *, существует, единственная и является сильно состоятельной оценкой, т.е.*

$$\hat{\theta}(N) \xrightarrow[\mathrm{N} \to \infty]{a.s.} \theta_0$$

.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов Д.В.* Идентификация линейных динамических систем нецелого порядка с помехой в выходном сигнале // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2534-2536.

2. *Ivanov D.V.* Identification discrete fractional order linear dynamic systems with output-error // Proceedings International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON'2013). Krasnoyarsk: Siberian Federal University. Russia, Krasnoyarsk, September 12-13, 2013. IEEE Catalog Number: CFP13794-CDR.

3. *Иванов Д.В., Кацюба О.А.* О Состоятельности оценок параметров ARX систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале // Стохастическая оптимизация в информатике. 2013. Т. 9. № 2. С. 21-32.

4. *Ivanov D.V.* Identification discrete fractional order linear dynamic systems with errors-in-variables // Proceedings of IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS'2013), Rostov-on-Don, Russia, September 27-30, 2013. P. 374-377.

Поступила в редакцию 10 июня 2015 г.

Ivanov D.V., Shirinov I.R. IDENTIFICATION OF MISO LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS WITH DIFFERENCES OF FRACTIONAL ORDER IN THE PRESENCE OF NOISE OBSERVATIONS

An algorithm is proposed, which is a generalization of the method of least squares, which produces strongly consistent estimates of the parameters of linear dynamic systems with differences of fractional order in the presence of noise in the observation Input and output signals in the absence of information about the distribution of the noise.

Key words: parametric identification; least squares method; the difference of fractional order; difference equations.

Иванов Дмитрий Владимирович, Самарский государственный университет путей сообщения, г. Самара, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры мехатроники в автоматизированных производствах, e-mail: dvi85@list.ru

Ivanov Dmitrii Vladimirovich, Samara State University of Transport Communications, Samara, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mechatronics in Automated Production Department, e-mail: dvi85@list.ru

Ширинов Ильдар Раджабович, Самарский государственный университет путей сообщения, г. Самара, Российская Федерация, аспирант кафедры мехатроники в автоматизированных производствах, e-mail: shirinov89@mail.ru

Shirinov Ildar Radzhabovich, Samara State University of Transport Communications, Samara, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Mechatronics in Automated Production Department, e-mail: shirinov89@mail.ru

УДК 519.6

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ МЕТОДЕ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ БЛОЧНЫХ РЕКУРСИВНЫХ АЛГОРИТМОВ

© Е.А. Ильченко

Ключевые слова: параллельный алгоритм; децентрализованное управление; расширенная присоединенная матрица; Adjoint; система Mathpar; SPMD вычислительная парадигма; MPI; многопоточность; hybrid parallel programming model; C++; GMP.

Дается описание общей схемы распараллеливания блочных рекурсивных алгоритмов, которая рассматривается на примере вычисления присоединенной матрицы, приводятся результаты экспериментов на вычислительном кластере «МВС-100К».

Рассмотрим пример блочного рекурсивного алгоритма. Даны две матрицы A, B, требуется найти их произведение. Разобьем матрицы A и B размером $n = 2^k$ на четыре равных блока:

$$\begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_0 & B_1 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 \\ C_2 & C_3 \end{pmatrix}.$$

Введем префиксное обозначение для функции матричного умножения $\mathfrak{m}(A,B) = C$, тогда получим:

$$\mathfrak{m}(A,B) = \begin{pmatrix} \mathfrak{m}(A_0,B_0) + \mathfrak{m}(A_1,B_2) & \mathfrak{m}(A_0,B_1) + \mathfrak{m}(A_1,B_3) \\ \mathfrak{m}(A_2,B_0) + \mathfrak{m}(A_3,B_2) & \mathfrak{m}(A_2,B_1) + \mathfrak{m}(A_3,B_3) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Таким же образом можно поступить с каждым из восьми умножений в правой части равенства (1), рисунок 2 показывает параллельную реализацию этого алгоритма.

Рассмотрим блочный алгоритм обращения матрицы, имеющий сложность матричного умножения [1,2]. Если $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ является обратимой матрицей и A ее обратимый блок, то верно равенство:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -A^{-1}C \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & (D - BA^{-1}C)^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \\ -B & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{pmatrix},$$