Колосницын Антон Васильевич, Институт систем энергетики им. Л.А Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: ankolos25@mail.ru

Kolosnitcyn Anton Vasilievich, Melentiev Energy Systems Institute of SB RAS, Irkutsk, the Russian Federation, e-mail: ankolos25@mail.ru

УДК 517.911.5

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ МЕТОДА МНОГОЛИСТНОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© С.В. Корнев

Ключевые слова: дифференциальное включение; многолистная направляющая функция; периодические решения; топологическая степень.
Рассматривается периодическая задача для нелинейного объекта, описываемого дифференциальным включением, правая часть которого не является выпуклозначной. В настоящей работе определяются и исследуются понятия полного и острого набора обобщенных многолистных направляющих функций и правильной многолистной направляющей функции. Применение теории топологической степени мультиотображений и указанных методов позволяет установить разрешимость рассматриваемой задачи.

В настоящей работе, следуя идеям [1–3], предлагается использовать метод многолистных направляющих функций для исследования задачи о существовании периодических решений дифференциального включения следующего вида:

$$z'(t) \in R(t, z(t)), \tag{1}$$

в предположение, что $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ является нормальным мультиотображением с компактными значениями и удовлетворяет условию T-периодичности ($T > 0$) по первому аргументу (по поводу терминологии см., например, [4, 5]).

Под решением задачи понимается абсолютно непрерывная функция $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую почти в каждой точке включению (1) и условию периодичности.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n (n > 2)$ выделена двумерная плоскость $\mathbb{R}^2$ и дополнительное к ней подпространство $\mathbb{R}^{n-2}$. Пусть q – оператор проектирования на плоскость $\mathbb{R}^2$ вдоль подпространства $\mathbb{R}^{n-2}$, а $p = I - q$. Ниже элементы $\mathbb{R}^2$ обозначаются через ξ, элементы $\mathbb{R}^{n-2}$ – через ζ. Пусть φ, ρ – полярные координаты в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим многолистную риманову поверхность $\Pi = \{(\varphi, \rho) : \varphi \in (-\infty, \infty), \rho \in (0, \infty)\}$. Пусть на Π задана скалярная непрерывно дифференцируемая функция $W(\varphi, \rho)$, для которой

$$\frac{\partial W(\varphi, \rho)}{\partial \varphi} > 0, \qquad W(\varphi + 2\pi, \rho) = W(\varphi, \rho) + 2\pi, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi. \tag{2}$$

На подпространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ пусть заданы скалярные непрерывно дифференцируемые функции

$$V_1(\zeta), V_2(\zeta), ..., V_k(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}^{n-2},\ k \geqslant 1. \tag{3}$$

Для заданного $r_0 > 0$ положим

$$m_i = \min_{\|\zeta\| \leqslant r_0} V_i(\zeta), \quad M_i = \max_{\|\zeta\| \leqslant r_0} V_i(\zeta),\ i = 1, ..., k, \quad M^* = \sum_{i=1}^{k} (|m_i| + |M_i|).$$

Всюду в дальнейшем будем считать, что для функций (3) выполнено условие

$$\nabla V_i(\zeta) \neq 0 \quad \text{для всех } \zeta \in \mathbb{R}^{n-2} : \|\zeta\| \geqslant r_0,\ \ i = 1, ..., k.$$

Пусть функции (3) удовлетворяют условию

$$\lim_{\|\zeta\| \to \infty} [|V_1(\zeta)| + |V_2(\zeta)| + ... + |V_k(\zeta)|] = \infty, \quad k \geqslant 1. \tag{4}$$

В силу условия (4) можно найти такое r^*, что

$$|V_1(\zeta)| + |V_2(\zeta)| + ... + |V_k(\zeta)| > M^*, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{n-2} : \|\zeta\| \geqslant r^*,\ k \geqslant 1.$$

Для $\rho_2 > \rho_1 \geqslant 0$ выделим в $\mathbb{R}^n$ область $\Omega\,(r^*, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{R}^n : \|pz\| < r^*, \rho_1 < \|qz\| < \rho_2\}$.

Будем предполагать, что на $[0, T]$ заданы непрерывные функции $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ такие, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и для п.в. $t \in [0, T]$

$$\mathop{sup}_{z \in \Omega(r^*, \rho_1, \rho_2)} \mathop{sup}_{y \in R(t,z)} (\nabla W(qz), qy) \leqslant \alpha(t) - \varepsilon, \qquad \mathop{inf}_{z \in \Omega(r^*, \rho_1, \rho_2)} \mathop{inf}_{y \in R(t,z)} (\nabla W(qz), qy) \geqslant \beta(t) + \varepsilon. \tag{5}$$

О п р е д е л е н и е 1. Функции $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$, обладающие свойствами (2) и (4), образуют *полный и острый набор обобщенных МВНФ* для включения (1) относительно области $\Omega\,(r^*, \rho_1, \rho_2)$, если выполнены следующие условия:

$$\sup_{t \in [0,T]} \sup_{y \in R(t,z)} \frac{|(qy, qz)|}{\|qz\|} \leqslant \frac{\rho_2 - \rho_1}{2T} - \varepsilon, \quad z \in \Omega(r^*, \rho_1, \rho_2); \tag{6}$$

$$(\nabla V_i(pz), py) \leqslant 0 \quad \text{для всех } y \in R(t, z),\ \|pz\| \geqslant r_0,\ \|qz\| \leqslant \rho_2,\ i = 1, ..., k; \tag{7}$$

$$2\pi(N-1) + \varepsilon \leqslant \int_0^T \alpha(\tau) d\tau, \quad \int_0^T \beta(\tau) d\tau \leqslant 2\pi N - \varepsilon, \tag{8}$$

где N — целое число; $\alpha(t), \beta(t)$ — функции, удовлетворяющие (5); и для каждого $\zeta \in \mathbb{R}^{n-2}$, $\|\zeta\| \geqslant r_0$ множество $K(\zeta) = \left\{\eta \in \mathbb{R}^{n-2} : \eta = \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_i \nabla V_i(\zeta),\ \gamma_1, ..., \gamma_k \geqslant 0\right\}$ является конусом.

Для $\rho_0 = (\rho_1 + \rho_2)/2$ положим $G(r^*, \rho_0) = \{z \in \mathbb{R}^n : \|pz\| < r^*,\ \|qz\| < \rho_0\}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть для включения (1) можно указать полный и острый набор* $\{V_1(\zeta), ..., V_k(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$ *обобщенных МВНФ относительно области* $\Omega\,(r^*, \rho_1, \rho_2)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\mathrm{ind}(V_1, \infty)$ *функции* $V_1(\zeta)$ *отличен от нуля.*

Тогда включение (1) имеет по крайней мере одно T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G\,(r^*, \rho_0)}$, $t \in [0, T]$.

О п р е д е л е н и е 2. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$, обладающих свойствами (2) и (4), будем называть *правильной МВНФ* для включения (1) относительно области $\Omega\,(r^*, \rho_1, \rho_2)$, если, кроме условий (6) и (8), выполнено условие

$$\langle \nabla V(pz), py \rangle \leqslant \delta_0 \,\|\nabla V(pz)\|\, \|py\| \quad \text{для всех } y \in R(t, z),$$

где $\|pz\| \geqslant r_0$, $\|qz\| \leqslant \rho_2$, $\delta_0 < 0$, и если существует непрерывно дифференцируемая функция $V_1(\zeta)$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{\|\zeta\|\to\infty} |V_1(\zeta)| = \infty \qquad \text{и} \qquad \|\nabla V(\zeta)\| \geqslant \|\nabla V_1(\zeta)\| \quad (\|\zeta\| \geqslant r_0).$$

Т е о р е м а 2. *Пусть для включения* (1) *можно указать правильную МВНФ* $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ *относительно области* $\Omega\,(r^*,\rho_1,\rho_2)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\mathrm{ind}(V,\infty)$ *функции* $V(\zeta)$ *отличен от нуля.*

Тогда включение (1) *имеет по крайней мере одно* T *-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in \overline{G\,(r^*,\rho_0)}$, $t \in [0,T]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

2. *Рачинский Д.И.* Вынужденные колебания в системах управления в условиях, близких к резонансу // АиТ. 1995. № 11. С. 87-98.

3. *Krasnoselskii A.M., Krasnoselskii M.A., Mawhin J., Pokrovskii A.V.* Generalized guiding functions in a problem on high frequency forced oscillations // Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl. 1994. V. 22. № 11. P. 1357-1371.

4. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: Либроком, 2011.

5. *Górniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Berlin: Springer, 2006.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00468), Минобрнауки России в рамках базовой части госзадания (грант 3488) и Российского научного фонда (грант № 14-21-00066).

Поступила в редакцию 13 мая 2015 г.

Kornev S.V. ON SOME DEVELOPMENTS OF THE METHOD OF MULTIVALENT GUIDING FUNCTIONS IN THE PERIODIC PROBLEM FOR SOME CLASSES OF DIFFERENTIAL INCLUSIONS

We consider the periodic problem for a nonlinear system governed by a differential inclusion with nonconvex right-hand side. In this paper, the notion of a complete and sharp set of generalized multivalent guiding functions and regular multivalent guiding function are defined. Application of the topological degree theory and these methods allows to establish the solvability of the periodic problem.

Key words: differential inclusion; multivalent guiding function; periodic solutions; topological degree.

Корнев Сергей Викторович, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: kornev _ vrn@rambler.ru

Kornev Sergei Viktorovich, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: kornev _ vrn@rambler.ru