12. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-97504) в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 2014/285).

Поступила в редакцию 20 апреля 2015 г.

Zhukovskiy E.S., Zabrodskiy I.A., Shindiapin A.I. PERIODIC SOLUTIONS OF IMPLICIT DIFFERENTIAL EQUATIONS

We consider implicit difference equations in an arbitrary metric space, for which we formulate the conditions for existence of periodic solutions. The study is based on the results of vector covering mappings.

Key words: difference equation; periodic solutions; vector covering mapping of metric spaces; multiple coincidence points.

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор института математики, физики и информатики, e-mail: zukovskys@mail.ru

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics, Physics and Informatics, e-mail: zukovskys@mail.ru

Забродский Илья Алексеевич, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: ilyatmb@yandex.ru

Zabrodskii Ilia Alekseevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Algebra and Geometry Department, e-mail: ilyatmb@yandex.ru

Шиндяпин Андрей Игоревич, Университет имени Эдуардо Мондлане, г. Мапуту, Мозамбик, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики и информатики, e-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz

Shindiapin Andrey Igorevich, Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Mathematics and Computer Science Department, e-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz

УДК 517.988

О ВОЗМУЩЕНИЯХ МНОГОЗНАЧНЫХ ВЕКТОРНО НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© Е.С. Жуковский, Ж.П. Мунембе

Ключевые слова: произведение метрических пространств; векторно накрывающие отображения метрических пространств; дифференциальное включение, краевая задача.

Для многозначных отображений, действующих в произведении метрических пространств, предложено понятие векторного накрывания. Получен векторный аналог теоремы о возмущениях накрывающих отображений. Этот результат применен к исследованию систем операторных включений неявного вида.

В связи с исследованием краевых задач для неявных дифференциальных уравнений в работах [1, 2] было предложено рассматривать векторные отображения, действующие в произведениях метрических пространств, с компонентами, обладающими свойством накрывания по диагональной переменной и липшицевыми по остальным переменным. Утверждения о таких отображениях нашли приложения в изучении вопросов существования, оценок, непрерывной зависимости от параметров решений различных систем неявных функциональных уравнений [3, 4] краевых задач для неявных функционально-дифференциальных уравнений [5, 6], задач управления [7].

Здесь с целью исследования систем включений предлагается определение понятия векторного накрывания для многозначных отображений, действующих в произведениях метрических пространств. Исследованиям многозначных отображений метрических пространств были начаты А.В. Арутюновым (см. [8–10]), получившим принцип точки совпадения многозначных накрывающего и липшицева отображений. В работе [11] для многозначных отображений доказана теорема о возмущениях, и этот результат применяется к исследованию задачи Коши для дифференциального включения неявного вида.

Стандартно обозначаем $\mathbb{R}^m$ — m-мерное вещественное пространство, $\mathbb{R}^m_+$ — конус векторов с неотрицательными компонентами пространства $\mathbb{R}^m$, I_m — единичную $m\times m$ матрицу. Для произвольных векторов $r^1, r^2 \in \mathbb{R}^m$ полагаем $r^1 \geqslant r^2$, если $r^1 - r^2 \in \mathbb{R}^m_+$.

Вначале приведем определение [8] свойства накрывания многозначных отображений.

Обозначим через $\mathrm{B}_X(u,r)$ замкнутый шар $\{x \in X : \rho_X(x,u) \leqslant r\}$ с центром в точке $u \in X$ радиуса $r \geqslant 0$ в пространстве X. Для произвольного множества $U \subset X$ определим его r-окрестность $\mathrm{B}_X(U,r) = \bigcup_{u\in U} \mathrm{B}_X(u,r)$.

О п р е д е л е н и е 1 [8]. Пусть задано число $\alpha > 0$. Отображение $\Psi : X \to Y$, где X, Y — метрические пространства, называется *α-накрывающим,* если для любых $r \geqslant 0$, $u \in X$ имеет место вложение

$$\mathrm{B}_Y(\Psi(u), \alpha r) \subset \Psi(\mathrm{B}_X(u,r)).$$

Сформулируем векторный аналог определения 1.

Пусть заданы метрические пространства X_i, Y_j с метриками ρ_{X_i}, ρ_{Y_j}, соответственно, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. В произведениях

$$\overline{X} \doteq \prod_{i=1}^{n} X_i, \quad \overline{Y} \doteq \prod_{j=1}^{m} Y_j$$

определим векторные метрики:

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}(x,u) = \big(\rho_{X_1}(x_1,u_1), \ldots, \rho_{X_n}(x_n,u_n)\big), \quad \overline{\rho}_{\overline{Y}}(y,w) = \big(\rho_{Y_1}(y_1,w_1), \ldots, \rho_{Y_m}(y_m,w_m)\big),$$

где $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $u = (u_1,\ldots,u_n) \in \overline{X}$, $y = (y_1,\ldots,y_m)$, $w = (w_1,\ldots,w_m) \in \overline{Y}$. Для векторов $r = (r_1,\ldots,r_m) \in \mathbb{R}^m_+$, $w = (w_1,\ldots,w_m) \in \overline{Y}$ положим

$$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(w,r) \doteq \{y \in \overline{Y} : \ \overline{\rho}_{\overline{Y}}(y,w) \leqslant r\} = \prod_{j=1}^{m} \mathrm{B}_{Y_j}(w_j, r_j).$$

Аналогично, для $d = (d_1,\ldots,d_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $u = (u_1,\ldots,u_n) \in \overline{X}$ обозначим

$$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u,d) \doteq \prod_{i=1}^{n} \mathrm{B}_{X_i}(u_i, d_i).$$

О п р е д е л е н и е 2. Пусть задана $n{\times}m$ матрица A с неотрицательными компонентами a_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Отображение $\Psi:\overline{X}\rightrightarrows\overline{Y}$ будем называть *векторно A-накрывающим*, если для любых $r\in\mathbb{R}^m_+$, $u\in\overline{X}$ выполнено

$$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u),r)\subset\Psi(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u,Ar)). \tag{1}$$

Прямо из определения 2 следует, что *отображение $\Psi:\overline{X}\rightrightarrows\overline{Y}$ является векторно A-накрывающим тогда и только тогда, когда при всех $u\in\overline{X}$, $w\in\Psi(u)$, $y\in\overline{Y}$ справедливо*

$$\exists\, x\in\overline{X}\quad \Psi(x)\ni y\ \ \&\ \ \overline{\rho}_{\overline{X}}(x,u)\leqslant A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y,w). \tag{2}$$

В случае $n=m=1$ определения 1, 2 равносильны: всякое векторно A-накрывающее многозначное отображение является α-накрывающим, и любое α-накрывающее отображение является векторно A-накрывающим, где $A=(a_{11})$, $a_{11}=\alpha^{-1}$.

Теперь определим векторный аналог свойства классического условия Липшица.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть задана $m{\times}n$ матрица B с неотрицательными компонентами $b_{j\,i}$, $j=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$. Отображение $\Phi:\overline{X}\rightrightarrows\overline{Y}$ будем называть *векторно B-липшицевым*, если для любых $u,v\in\overline{X}$ выполнено

$$\Phi(u)\subset\overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}\big(\Phi(v),\,B\overline{\rho}_{\overline{X}}(u,v)\big). \tag{3}$$

Отображение $\Phi:\overline{X}\rightrightarrows\overline{Y}$ является векторно B-липшицевым, если для любых $u,v\in\overline{X}$ и произвольного $y\in\Phi(u)$ справедливо

$$\exists w\in\Phi(v)\quad \overline{\rho}_{\overline{Y}}(y,w)\leqslant B\overline{\rho}_{\overline{X}}(u,v). \tag{4}$$

Сформулируем утверждение о возмущениях векторно накрывающих многозначных отображений. Пусть задано отображение $\Upsilon:\overline{X}\times\overline{X}\rightrightarrows\overline{Y}$. Определим отображение $F:\overline{X}\rightrightarrows\overline{Y}$ равенством $F(x)\doteq\Upsilon(x,x)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть пространства X_i, $i=\overline{1,n}$, являются полными; график отображения F замкнут в пространстве $\overline{X}\times\overline{Y}$; существуют $n\times m$ матрица A и $m\times n$ матрица B такие, что:*

1.1) *при любых $u\in\overline{X}$, $r\in\mathbb{R}^m_+$, для отображения $\Psi\doteq\Upsilon(\cdot,u):\overline{X}\rightrightarrows\overline{Y}$ выполнено (1);*

1.2) *при любых $u,v\in\overline{X}$, для отображения $\Phi\doteq\Upsilon(u,\cdot)$ выполнено (3);*

1.3) *спектральный радиус ϱ матрицы BA отвечает неравенству $\varrho(BA)<1$.*

Тогда отображение F является векторно $A(I_m-BA)^{-1}$-накрывающим.

В силу (2) утверждаемое в теореме 1 свойство векторного накрывания отображения F позволяет исследовать разрешимость включения

$$F(x)\doteq\Upsilon(x,x)\ni y.$$

Запишем это включение через компоненты векторов x,y,Υ в виде системы

$$\left\{\begin{array}{l}\Upsilon_1(x_1,\ldots,x_n,x_1,\ldots,x_n)\ni y_1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ \Upsilon_m(x_1,\ldots,x_n,x_1,\ldots,x_n)\ni y_m.\end{array}\right. \tag{5}$$

Теорема 1 равносильна следующему утверждению.

Т е о р е м а 1′. *При выполнении условий теоремы 1 для любых $u\in\overline{X}$, $w\in F(u)$, $y\in\overline{Y}$ существует решение $x=\xi\in\overline{X}$ системы (5), удовлетворяющее неравенству*

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}(\xi,u)\leqslant A(I_m-BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}(w,\,y). \tag{6}$$

В случае, если требуется исследовать систему (5) при фиксированной, а не любой, правой части $y \in \overline{Y}$, условия теоремы $1'$ будут избыточными. Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. *Пусть задан элемент* $y \in \overline{Y}$. *Предположим, что пространства* X_i, $i = \overline{1,n}$, *являются полными; для любых последовательностей* $\{x^k\} \subset \overline{X}$, $\{y^k\} \subset \overline{Y}$ *таких, что* $y^k \in F(x^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, *имеет место импликация*

$$\Big(\,\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y^k, y) \to 0, \quad \exists x \in \overline{X} \ \ \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^k, x) \to 0 \,\Big) \ \Rightarrow \quad y \in F(x);$$

существуют $n \times m$ *матрица* A *и* $m \times n$ *матрица* B *такие, что справедливо* 1.3) *и выполнены условия:*

2.1) *при любых* $u \in \overline{X}$, $w \in \Upsilon(u,u)$, *для отображения* $\Psi \doteq \Upsilon(\cdot, u) : \overline{X} \rightrightarrows \overline{Y}$ *имеет место соотношение (2);*

2.2) *при любом* $u \in \overline{X}$ *таком, что* $y \in \Upsilon(u,u)$, *отображение* $\Phi \doteq \Upsilon(u, \cdot)$ *для любого* $v \in \overline{X}$ *удовлетворяет условию (4);*

Тогда существует решение $x = \xi \in \overline{X}$ *системы (5), удовлетворяющее неравенству (6).*

В скалярном случае, т. е. при $n = m = 1$ приведенные утверждения аналогичны теореме о возмущениях многозначных отображений метрических пространств, полученной в [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–455.

2. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в проблеме корректности краевых задач для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. № 4. С. 1082–1085.

3. *Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Об исследовании систем функциональных уравнений методами теории накрывающих отображений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 1. С. 38–42.

4. *Жуковский Е.С., Мунембе Ж.П., Плужникова Е.А.* Функциональные уравнения с запаздыванием в пространстве суммируемых функций // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2523–2526.

5. *Жуковский Е.С., Жуковская Т.В.* Об условиях разрешимости краевой задачи для нелинейного абстрактного функционально-дифференциального уравнения // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2012. № 1. С. 50-51.

6. *Жуковский Е.С., Жуковская Т.В.* О разрешимости дифференциального уравнения с запаздыванием, не разрешенного относительно производной // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. № 1. С. 67–69.

7. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 31–56.

8. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.

9. *Арутюнов А.В.* Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Математические заметки. 2009. Т. 86. № 2. С. 163–169.

10. *Арутюнов А.В.* Точки совпадения двух отображений // Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48. № 1. С. 89–93.

11. *Arutyunov A., de Oliveira V.A., Pereira F.L., Zhukovskiy E., Zhukovskiy S.* On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2015. V. 94. Iss. 1. P. 129–143.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 15-11-10021).

Поступила в редакцию 20 апреля 2015 г.

Zhukovskiy E.S., Munembe J.P. ON PERTURBATIONS OF MULTIVALUED VECTOR COVERING MAPS

For multivalued maps acting in the product of metric spaces, the notion of vector covering is proposed. The vector analogue of the theorem on perturbations of covering maps is obtained. This result is applied to investigate systems of implicit operator inclusions.

Key words: product of metric spaces; vector covering map of metric spaces; differential inclusion; boundary value problem.

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор института математики, физики и информатики, e-mail: zukovskys@mail.ru

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics, Physics and Informatics, e-mail: zukovskys@mail.ru

Мунембе Жоао Пауло, Университет имени Эдуардо Мондлане, г.Мапуту, Мозамбик, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики, e-mail: jmunembe3@gmail.com

Munembe Joao Paulo, Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematics and Computer Science Department, e-mail: jmunembe3@gmail.com

УДК 517

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

© С.Е. Жуковский, Д.В. Петров

Ключевые слова: задача выпуклого программирования; необходимые условия минимума; принцип наибольшей энтропии.

В работе исследуется задача условной минимизации выпуклого интегрального функционала при линейных ограничениях в пространстве суммируемых функций. Получены необходимые и достаточные условия минимума для рассматриваемой задачи. Приводится пример использования полученного результата для решения задачи максимизации энтропии.

I. Постановка задачи. Пусть задана функция $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$, натуральное число k, измеримые по Лебегу существенно ограниченные на любом измеримом ограниченном множестве функции $\varphi_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и числа α_i, $i=\overline{1,k}$. Здесь $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Всюду далее будем предполагать, что

(F1) функция f является выпуклой замкнутой и собственной, $f(p)=+\infty$ для любого $p<0$, $f(0)=0$, $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))\neq\emptyset$.

Здесь и далее $\mathrm{dom}(f)=\{p\in\mathbb{R}:\ f(p)<\infty\}$ – эффективное множество функции f.

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех функций $p(\cdot)\in L_1(\mathbb{R})$ таких, что

$$\varphi_i(\cdot)p(\cdot)\in L_1(\mathbb{R})\quad \forall i=\overline{1,k} \tag{1}$$