УДК 517.988.6 + 517.922

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЕКТОРНЫМИ НАКРЫВАЮЩИМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

© **В.С. Трещёв**

Ключевые слова: векторные накрывающие отображения; метрические пространства; уравнение.

Получены условия корректной разрешимости систем операторных уравнений с векторно условно накрывающими отображениями.

В работах [1, 2] доказаны теоремы о существовании и свойствах точек совпадения, основанные на понятии накрывающего отображения в метрических пространствах. Идея распространения понятия накрывания на векторные отображения предложена в [3]. В данной работе свойство векторного накрывания используется для получения условий корректной разрешимости систем операторных уравнений.

Используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^m$ – m-мерное вещественное пространство, $\mathbb{R}^m_+$ – конус векторов с неотрицательными компонентами пространства $\mathbb{R}^m$.

Пусть заданы метрические пространства X_i, Y_j, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Определим произведение этих пространств

$$\overline{X}=\prod_{i=1}^n X_i,\quad \overline{Y}=\prod_{j=1}^m Y_j$$

и зададим в них векторные метрики, полагая для $x=(x_1,\dots,x_n)$, $u=(u_1,\dots,u_n)\in\overline{X}$ и $y=(y_1,\dots,y_m)$, $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_m)\in\overline{Y}$

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}(x,u)=\big(\rho_{X_1}(x_1,u_1),\dots,\rho_{X_n}(x_n,u_n)\big),\quad \overline{\rho}_{\overline{Y}}(y,\omega)=\big(\rho_{Y_1}(y_1,\omega_1),\dots,\rho_{Y_m}(y_m,\omega_m)\big).$$

Для метрического пространства (X_i,ρ_{X_i}) положим $B_{X_i}(u_i,d_i)=\{x_i\in X_i:\rho_{X_i}(u_i,x_i)\leqslant d_i\}$ замкнутый шар с центром в точке $u_i\in X_i$ радиуса $d_i\geqslant 0$. Аналогично, обозначим $B_{Y_j}(\omega_j,r_j)$ замкнутый шар в пространстве (Y_j,ρ_{Y_j}). Определим произведение этих шаров

$$\overline{B}_{\overline{Y}}(\omega,r)=\{y\in\overline{Y},\ \overline{\rho}_{\overline{Y}}(y,\omega)\leqslant r\}=\prod_{j=1}^m B_{Y_j}(\omega_j,r_j),\ \text{где}\ r=(r_1,\dots,r_m)\in\mathbb{R}^m_+,$$

$$\overline{B}_{\overline{X}}(u,d)=\prod_{i=1}^n B_{X_i}(u_i,d_i),\ \text{где}\ d=(d_1,\dots,d_n)\in\mathbb{R}^n_+.$$

Пусть, далее, задано множество $W\subseteq\overline{Y}$, $n\times m$ матрица A с неотрицательными компонентами a_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Для заданных $u^0\in\overline{X}$, $R\in\mathbb{R}^m_+$ $u\in\overline{B}_{\overline{X}}(u^0,R)$ определим множество

$$\mathfrak{B}(u^0,R,u)=\{(u,r)\in\overline{X}\times\mathbb{R}^m_+:\ Ar+\overline{\rho}_{\overline{X}}(u,u^0)\leqslant R\}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Отображение $F:\overline{X}\to\overline{Y}$ называем векторно условно A-накрывающим множество W на совокупности $\mathfrak{B}(u^0,R,u)$ если

$$\forall y\in W\cap F(\overline{X})\quad A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y,F(u))+\overline{\rho}_{\overline{X}}(u,u^0)\leqslant R\Rightarrow$$
$$\exists x\in\overline{X}\quad F(x)=y\ \text{ и }\ \overline{\rho}_{\overline{X}}(x,u)\leqslant A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y,F(u)).$$

Пусть при любом натуральном $l=1,2,\dots$ определено отображение $\Phi_l:\overline{X}\times\overline{X}\to\overline{Y}$ и задан вектор $y_l\in\overline{Y}$. Рассмотрим последовательность уравнений

$$\Phi_l(x,x) = y_l, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

относительно неизвестного $x \in \overline{X}$, или в более подробной записи

$$\left\{ \begin{array}{c} \Phi_{1l}(x_1,\ldots,x_n,x_1,\ldots,x_n) = y_{1l}, \\ \Phi_{2l}(x_1,\ldots,x_n,x_1,\ldots,x_n) = y_{2l}, \\ \vdots \\ \Phi_{ml}(x_1,\ldots,x_n,x_1,\ldots,x_n) = y_{ml}, \end{array} \right. \qquad l = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Пусть, далее, для некоторого элемента $u^0 = (u^0_1, \ldots, u^0_n) \in \overline{X}$ при $l \to \infty$ имеет место сходимость

$$\rho_{Y_i}\big(\Phi_{il}(u^0, u^0), y_{il}\big) \to 0 \ \ i = \overline{1, m}. \tag{3}$$

Нас интересуют условия, обеспечивающие разрешимость при любом натуральном l системы уравнений (2) и сходимость к u^0 последовательности решений.

Далее, пусть заданы $u^0 \in \overline{X}$, $R \in \mathbb{R}^n_+$, $d \in \mathbb{R}^m_+$, матрицы $A_{n\times m}$ и $B_{m\times n}$ с неотрицательными компонентами и единичная матрица $I_{m\times m}$. Определим при всех $l = 1, 2, \ldots$

$$r(y_l) = (I - BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi_l(u^0, u^0), y_l\big).$$

Отметим, что вследствие (3) выполнено $r(y_l) \to 0$ при $l \to \infty$.

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Пусть пространства* X_i, $i = \overline{1, n}$, *являются полными и при всех* $l = 1, 2, \ldots$ *выполнены следующие условия: для любого* $u \in U = \overline{B}_{\overline{X}}(u^0, R)$, *отображение* $\Phi_l(\cdot, u) : \overline{X} \to \overline{Y}$ *является векторно условно* A*-накрывающим множество* $W_l(u) = \overline{B}_{\overline{Y}}\big(\Phi_l(u^0, u), d\big)$ *на совокупности* $\mathfrak{B}(u^0, R, u)$; *для любых* $u, v \in U$ *выполнено неравенство*

$$\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi_l(v, u), \Phi_l(v, v)\big) \leqslant B\overline{\rho}_{\overline{X}}(u, v);$$

для любой последовательности $\{v^k\} \in U$ *из сходимости (при* $k \to \infty$ *)* $\overline{\rho}_{\overline{X}}(v^k, u) \to 0$, $\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi_l(v^k, v), y_l\big) \to 0$ *следует* $\Phi_l(v, v) = y_l$, $l = 1, 2, \ldots$; *для спектрального радиуса* ϱ *матрицы* BA *выполнено* $\varrho(BA) < 1$; *для любого* $u \in \overline{B}_{\overline{X}}\big(u^0, Ar(y_l)\big)$ *выполнено включение* $y_l \in \Phi_l(U, u)$.

Тогда, если имеет место соотношение (3), то при каждом натуральном l, *начиная с некоторого номера, существует такое решение* $\xi^l = (\xi^l_1, \ldots, \xi^l_n) \in \overline{X}$ *системы (2), что* $\xi^l \to u^0$.

Аналогичный результат для скалярного случая $n = m = 1$ получен в работах [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613-634.

2. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523-1537.

3. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439-456.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-97504).

Поступила в редакцию 2 июня 2015 г.

Treshchev V.S. WELL-POSED SOLVABILITY OF SYSTEMS OF OPERATOR EQUATIONS WITH VECTOR COVERING MAPPINGS

Conditions of the well-posed solvability of systems of operator equations with vector conditionally covering mappings are obtained.

Key words: vector covering mappings; metric spaces; equation.

Трещёв Валентин Сергеевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: treshchev.math@mail.ru

Treshchev Valentin Sergeyevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Algebra and Geometry Department, e-mail: treshchev.math@mail.ru

УДК 519.87 + 519.722 + 519.213

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В ЭНТРОПИЙНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ГАУССОВСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© **А.Н. Тырсин, И.С. Соколова**

Ключевые слова: математическая модель; дифференциальная энтропия; стохастическая система; случайный вектор; нормальное распределение; оптимизация.

Рассмотрены задачи управления гауссовской стохастической системой с помощью увеличения и уменьшения ее дифференциальной энтропии. В качестве модели стохастической системы используется многомерная гауссовская случайная величина.

Использование энтропии при исследовании различных стохастических систем является распространенным [1–4]. Актуальным направлением математического моделирования сложных систем является моделирование таких систем с помощью энтропийных методов. В основе этих методов лежит использование энтропии в качестве критерия оценки функционирования системы. Это обусловлено тем, что энтропия — универсальный параметр, свойственный различным категориям систем, экономическим, биологическим, техническим и др.

Энтропийное моделирование гауссовских стохастических систем состоит в следующем [5]. Представим стохастическую систему S в виде многомерного нормального случайного вектора $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$. Каждый элемент Y_i этого вектора является одномерной гауссовской случайной величиной, которая характеризует функционирование соответствующего элемента исследуемой системы. Элементы могут быть как взаимозависимыми, так и не зависеть друг от друга.

Представим дифференциальную энтропию случайного вектора $\mathbf{Y}$ как [5]

$$H(\mathbf{Y}) = \frac{1}{2}\ln[(2\pi e)^m|\mathbf{\Sigma}|] = \sum_{l=1}^{m} H(Y_i) + \frac{1}{2}\ln(|\mathbf{R}|), \tag{1}$$

где $Y_i = \dfrac{1}{2}\ln(2\pi e\sigma^2_{Y_i})$; $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{R}$ — ковариационная и корреляционная матрицы случайного вектора $\mathbf{Y}$.