into equations in the subspaces. The formula for the control, the use of which corresponds to the desired output function, is constructed.

Key words: observing system; state function; control, output function.

Раецкая Елена Владимировна, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, e-mail: raetskaya@inbox.ru

Raetskaya Elena Vladimirovna, Morozov Voronezh State Forestry Engineering University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematics Department, e-mail: raetskaya@inbox.ru

Зубова Светлана Петровна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, e-mail: spzubova@mail.ru.

Zubova Svetlana Petrovna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Analysis Department, e-mail: spzubova@mail.ru

УДК 517.977

ДВА ПОДХОДА К СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ-БЕЛЛМАНА И ЕГО СИНГУЛЯРНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

© А.С. Родин

Ключевые слова: уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана; сингулярное множество; сингулярная характеристика; метод сингулярных характеристик.

Изучается структура решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, когда гамильтониан непрерывно дифференцируем по всем компонентам. Исследование структуры решения данной задачи планируется провести в русле методов описанных в книге А.А. Меликяна.

Рассматривается краевая задача Коши для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + H\big(t,x,D_x\varphi(t,x)\big) = 0, \quad \varphi(T,x) = \sigma(x), \tag{1}$$

где $t \in [0,T]$, $x \in R^n$, $D_x\varphi(t,x) = \left(\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_n}\right)$.

Обозначим $\Pi_T = \{(t,x) : t \in [0,T], x \in R^n\}$.

Предполагается, что в задаче (1) выполнены следующие предположения:

A1) функция $H(t,x,s)$ непрерывно дифференцируема по переменным t,x,s , вогнута по переменной s;

A2) функция $\sigma(x)$ непрерывно дифференцируема;

A3) выполнены условия подлинейного роста:

$$||D_xH(t,x,s)|| \leqslant \alpha(1 + ||x|| + ||s||), \quad \alpha > 0;$$

$$||D_sH(t,x,s)|| \leqslant \beta(1 + ||x|| + ||s||), \quad \beta > 0.$$

Характеристическая система с краевыми условиями при $t = T$ для задачи (1) имеет вид

$$\dot{\tilde{x}} = D_s H(t, \tilde{x}, \tilde{s}), \quad \dot{\tilde{s}} = -D_x H(t, \tilde{x}, \tilde{s}), \quad \dot{\tilde{z}} = \langle \tilde{s}, D_s H(t, \tilde{x}, \tilde{s}) \rangle - H(t, \tilde{x}, \tilde{s}),$$
$$\tilde{x}(T, \xi) = \xi, \quad \tilde{s}(T, \xi) = D_x \sigma(\xi), \quad \tilde{z}(T, \xi) = \sigma(\xi), \quad \forall\, \xi \in R^n.$$

Решения этой системы $\tilde{x}$, $\tilde{s}$, $\tilde{z}$ называются, соответственно, фазовыми, импульсными, ценовыми характеристиками уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Рассматривается кусочно-гладкое обобщенное (минимаксное) решение $\varphi(\cdot)$ задачи (1) [1].

Определение 1 [2, 3]. *Сингулярным множеством* Q для обобщенного решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1) называется множество точек $(t, x) \in \Pi_T$, в которых функция φ не дифференцируема.

Определение 2. *Сингулярной характеристикой* называется характеристика, фазовая компонента $\tilde{x}(\cdot)$ которой лежит в сингулярном множестве с некоторого момента.

Пусть $M_{[k]}$ — подмногообразие из конечного набора многообразий, образующих сингулярное множество Q, размерность которого равна $(n + 1 - k)$.

Теорема 1. *Если в задаче (1) выполнены условия* $A1 - A3$, $(t, x) \in M_{[k]}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, *и гамильтониан* H *зависит только от переменной* s, *то не существует сингулярных характеристик.*

Замечание 1. В случае, когда гамильтониан H зависит не только от s, а еще хотя бы от t или от x, то может существовать сингулярная характеристика. При этом к фазовой компоненте этой характеристики фазовые компоненты других характеристик подходят по касательной.

Опираясь на книгу [4], и на изложенный в ней метод сингулярных характеристик планируется продемонстрировать данный метод при исследовании структуры решения задачи (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнения в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т комп. исследований, 2003.

2. *Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г.* Метод характеристик для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2013.

3. *Колпакова Е.А.* Обобщённый метод характеристик в теории уравнений Гамильтона-Якоби и законов сохранения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 95-98.

4. *Меликян А.А.* Обобщенные характеристики уравнений в частных производных первого порядка. М.; Ижевск: Ин-т комп. исследований, 2014.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №14-01-00168).

Поступила в редакцию 9 июня 2015 г.

Rodin A.S. TWO APPROACHES TO THE STRUCTURE OF THE SOLUTION TO THE HAMILTON–JACOBI–BELLMAN EQUATION AND ITS SINGULAR CHARACTERISTICS

The structure of the solution to the Hamilton–Jacobi–Bellman equation when the Hamiltonian is continuously differentiable by all components is studied. Research of the structure of the solution to such a problem is planned to conduct within the framework of the methods described in the book by A.A. Melikyan.

Key words: the equation of Hamilton–Jacobi–Bellmana; singular set; singular characteristic; method of singular characteristics.

Родин Алексей Семёнович, Институт математики и механики УрО РАН, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, аспирант, e-mail: alexey.rodin.ekb@gmail.com

Rodin Aleksey Semenovich, Institute for Mathematics and Mechanics of UB RAS, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, the Russian Federation, Post-graduate Student, e-mail: alexey.rodin.ekb@gmail.com

УДК 519.651 + 517.518.823

О РЕШЕНИИ ДВУХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ, ПОРОЖДЕННЫХ ПРОСТЕЙШИМ ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ

© **В.И. Родионов, Н.В. Родионова**

Ключевые слова: интерполяция; аппроксимирующий сплайн; многочлены Чебышёва.
Предлагаемый авторами метод построения разностных схем основан на минимизации функционала невязки, заданного в пространстве специальных многомерных сплайнов произвольной степени. Эффективность метода показана на примере простейшего волнового уравнения.

Работа развивает авторский метод построения экономичных разностных схем для решения простейших задач математической физики [1] и опирается на публикации [2–4].

Уравнение $\mathrm{u}_{tt} = \mathrm{c}\,\mathrm{u}_{\xi\xi}$, заданное в прямоугольнике, заменой переменных приводится к виду $\mathrm{a}\,\mathrm{u}_{tt} = \mathrm{b}\,\mathrm{u}_{\xi\xi}$ (в терминах новых переменных из квадрата $\Pi \doteq [0,1]^2$). Пусть числа a, b положительны, а непрерывные функции $\phi,\, \psi,\, \rho_0,\, \rho_1\colon\, [0,1] \to \mathbb{R}$ таковы, что $\phi(0) = \rho_0(0)$, $\phi(1) = \rho_1(0)$ и существуют производные $\rho_0'(0)$, $\rho_1'(0)$, $\rho_0''(0)$, $\rho_1''(0)$.

Решение $\mathrm{u} = \mathrm{u}(t,\xi)$, $(t,\xi) \in \Pi$, задачи

$$\mathrm{a}\,\mathrm{u}_{tt} = \mathrm{b}\,\mathrm{u}_{\xi\xi}, \quad \mathrm{u}(0,\xi) = \phi(\xi), \quad \mathrm{u}_t(0,\xi) = \psi(\xi), \quad \mathrm{u}(t,0) = \rho_0(t), \quad \mathrm{u}(t,1) = \rho_1(t)$$

представимо в виде $\mathrm{u} = \mathrm{u}^1 + \mathrm{u}^2$, где $\mathrm{u}^1 = \mathrm{u}^1(t,\xi)$, $\mathrm{u}^2 = \mathrm{u}^2(t,\xi)$ — это решения задач

$$\mathrm{a}\,\mathrm{u}_{tt} = \mathrm{b}\,\mathrm{u}_{\xi\xi}, \quad \mathrm{u}(0,\xi) = \phi(\xi) - \widehat{\phi}(\xi), \quad \mathrm{u}_t(0,\xi) = \psi(\xi) - \widehat{\psi}(\xi),$$

$$\mathrm{u}(t,0) = \rho_0(0), \quad \mathrm{u}(t,1) = \rho_1(0), \tag{I}$$

$$\mathrm{a}\,\mathrm{u}_{tt} = \mathrm{b}\,\mathrm{u}_{\xi\xi}, \quad \mathrm{u}(0,\xi) = \widehat{\phi}(\xi), \quad \mathrm{u}_t(0,\xi) = \widehat{\psi}(\xi), \quad \mathrm{u}(t,0) = \widehat{\rho}_0(t), \quad \mathrm{u}(t,1) = \widehat{\rho}_1(t) \tag{II}$$

соответственно. Использованы обозначения $\widehat{\rho}_0(t) \doteq \rho_0(t) - \rho_0(0)$, $\widehat{\rho}_1(t) \doteq \rho_1(t) - \rho_1(0)$,

$$\widehat{\phi}(\xi) \doteq -\,\tfrac{\mathrm{a}}{6\mathrm{b}}\,\xi\,(\,1-\xi\,)\,\big[\,\rho_0''(0)\,(\,2-\xi\,) + \rho_1''(0)\,(\,1+\xi\,)\,\big], \quad \widehat{\psi}(\xi) \doteq \rho_0'(0)\,(\,1-\xi\,) + \rho_1'(0)\,\xi.$$

Эта специфика позволяет применять для численного решения исходной задачи многомерные сплайны [5]: 1) сплайн u^1 , являющийся приближенным решением задачи (I), на границе $\xi = 0$, $\xi = 1$ целиком совпадает с функциями-константами $\rho_0(0)$, $\rho_1(0)$, поэтому чем больше узлов на границе $t = 0$ (чем больше N), тем точнее будет решение u^1 этой задачи; 2) сплайн u^2 , являющийся приближенным решением задачи (II), на границе $t = 0$ целиком совпадает с полиномом $\widehat{\phi}(\xi)$ и $\|\, u_t^2(0,\xi) - \widehat{\psi}(\xi)\,\|_{\mathrm{C}[0,1]} = O(N^{-2})$, поэтому чем больше узлов на границе $\xi = 0$, $\xi = 1$, тем точнее будет решение u^2 второй задачи.

В качестве решения задачи (I) предлагается использовать оптимальный сплайн задачи

$$J_N \doteq \big\|\,\mathrm{a}\,u_{tt} - \mathrm{b}\,u_{\xi\xi}\,\big\|^2_{\mathrm{L}_2(\Pi)} \to \min, \qquad u \in \sigma_N(\Pi). \tag{1}$$