УДК 517.923 + 517.977.5 + 519.718 + 62.50

РОБАСТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ КЛАССА ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ УСЛОВИЙ СВЕРХУСТОЙЧИВОСТИ

© Ю.В. Талагаев

Ключевые слова: гиперхаотические системы; сверхустойчивость; робастная стабилизация.

Представлен метод анализа и управления хаотическими системами с параметрической неопределенностью на основе условий сверхустойчивости. Рассмотрены конструктивные способы проверки достижимости системой сверхустойчивой динамики и определен класс сверхстабилизируемых хаотических систем. Показано, как можно использовать условия сверхустойчивости для робастного анализа и синтеза сверхстабилизирующего регулятора, который обеспечивает заданные характеристики переходного процесса. Приведены результаты численного моделирования, подтверждающие эффективность метода.

1. Введение

На протяжении последних двух десятилетий внимание исследователей в области моделирования и управления динамикой сложных систем привлекают гиперхаотические системы [1]. Этот класс хаотических систем описывается системой нелинейных автономных дифференциальных уравнений с размерностью фазового пространства равной четырем и его главной особенностью является динамическое поведение, которое характеризуется наличием двух и более положительных ляпуновских показателей. Вследствие этого гиперхаотические системы демонстрирует более сложное, трудно предсказуемое и управляемое поведение, чем трехмерные хаотические системы (системы типа Лоренца, Спрота и др.). Особые свойства гиперхаотических систем привлекательны для использования в практических приложениях (защита информации, синхронизация и др.), а также востребованы для анализа социальных и экономических систем [2].

Накопленные работы в области анализа и управления гиперхасом можно разделить на две группы. К первой группе относятся исследования, которые посвящены конструированию новых систем [3–8] и их практическим реализациям [9–15]. Вторую группу составляют работы, в которых предлагаются различные методы управления гиперхаотической динамикой [16–28]. Как правило, целью управления гиперхаотическими системами является стабилизация неустойчивого состояния равновесия, то есть подавление хаоса. При этом из-за сильной неустойчивости, присущей гиперхаотическим системам, при стабилизации часто наблюдается эффект «всплеска». Вместо монотонного убывания, на начальном этапе переходного процесса происходит резкий рост нормы решения. На практике для многих систем управления эта ситуация нежелательна, поскольку ее результатом может стать нарушение условий безопасного функционирования объекта. Учитывая это, для гиперхаотических систем особенно важно выбирать управление, которое могло бы стабилизировать систему с заданными характеристиками переходного процесса. Более того, предлагаемые методы управления строятся при условии, что известны точные значения параметров гиперхаотической системы. Но в реальных условиях параметры системы подвержены неконтролируемым возмущениям. Поэтому проектировать управление необходимо также с учетом наличия параметрической неопределенности.

В данной работе предлагается способ анализа и синтеза, который позволяет преодолеть перечисленные затруднения, возникающие при управлении гиперхаотическими системами.

Метод основан на использовании условий сверхустойчивости [29, 30], которые предоставляют достаточные условия устойчивости. Условия сверхустойчивости удобны тем, что формулируются в терминах элементов матрицы параметров системы, а не их собственных значений. Возникающие линейные ограничения на параметры системы являются жесткими и не для каждой системы могут быть выполнены выбором обратной связи. Однако, если сверхустойчивость достижима, становится возможным найти эффективные способы решения задач ряда сложных задач управления. Применение условий сверхустойчивости к хаотическим системам начато в работе [31], где были исследованы условия достижения сверхустойчивости для трехмерных автономных хаотических систем. В работе [32] показано, что на основе условий сверхустойчивости для хаотических систем можно решать задачи робастной сверхстабилизации и подавления ограниченных возмущений. Целью этой работы является обобщение полученных ранее результатов на гиперхаотические системы. Выделен класс гиперхаотических систем, для которого исследованы условия достижения сверхустойчивой динамики и продемонстрирована эффективность условий сверхустойчивости для робастного анализа и управления при наличии параметрической неопределенности. Предложенный подход позволяет обнаружить сверхстабилизируемые гиперхаотические системы и найти сверхстабилизирующее управление, обеспечивающее заданные характеристики переходных процессов.

2. Сверхустойчивость хаотических систем

2.1. Предварительные сведения

Приведем определение и основные свойства сверхустойчивых систем [29, 30]. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

где $x \in R^n$ — состояние, $u \in R^m$ — управление, $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ — матрица системных параметров, $B = (b_{ij}) \in R^{n\times m}$ — матрица входов. Матрица и соответствующая ей система (1) называется сверхустойчивой, если выполнено

$$\sigma(A) = \min_i \left(-a_{ii} - \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \right) > 0, \quad i = 1, ..., n, \tag{2}$$

где $\sigma(A)$ — степень сверхустойчивости матрицы A. Условия свехрустойчивости (2) налагают ограничения на элементы матрицы A и являются достаточными условиями устойчивости. Если система сверхустойчива, то она также устойчива (все собственные заначения матрицы имеют отрицательную действительную часть). Обратное утверждение в общем случае не верно. Таким образом, сверхустойчивые системы являются подклассом устойчивых систем.

Сверхустойчивые системы обладают практически важными свойствами. При $u(t) \equiv 0$ для любого начального условия состояние системы удовлетворяет $||x(t)|| \leqslant ||x(0)||e^{-\sigma(A)t}$. Это означает, что для любого начального условия переход к сверхустойчивому состоянию будет происходить монотонно. При этом на начальном этапе переходного процесса не возникнет скачкообразное возрастание нормы решения, тогда как для устойчивых систем этот нежелательный эффект вполне возможен. Если $u(t) \leqslant 1$ и $||x(0)|| \leqslant \eta = ||B||_1/\sigma(A)$, то $||x(t)|| \leqslant \eta$. То есть траектории, начинающиеся во множестве $\{x \in R^n : \ ||x|| \leqslant \eta\}$ останутся в нем при всех допустимых u. Сверхустойчивость (в отличие от устойчивости) сохраняется при наличии нелинейных возмущений. Поэтому условия сверхустойчивости могут быть обобщены на нелинейные динамические системы, которые могут демонстрировать хаотическое поведение.

2.2. Условия достижимости сверхустойчивости

Рассмотрим класс нелинейных управляемых систем

$$\dot{x} = Ax + g(x) + Bu, \tag{3}$$

где, $x \in R^n$, $g(x)$ — нелинейное возмущение, $g : R^n \to R^n$, $g(x)|_{x=0} = 0$. Пусть при $u(t) \equiv 0$ значения параметров таковы, что система (3) демонстрирует хаотическую (или гиперхаотическую) динамику. Предполагается, что: 1) размерность фазового пространства $n \geqslant 3$; 2) система диссипативна; 3) траектории системы эволюционируют в ограниченной области $S = \{x : ||x(t)|| \leqslant L\} \subset R^n$; 4) система имеет состояние равновесия в нуле и матрица Якоби $J = A$ при $x = 0$.

Если система (3) имеет хаотическую динамику, то нулевое состояние равновесия неустойчиво. Заменим требование обеспечить его устойчивость на сверхустойчивость. Тогда задача сверхстабилизации заключается в следующем. Необходимо найти обратную связь

$$u = Kx, \quad K = (k_{ij}) \in R^{m \times n}, \tag{4}$$

обеспечивающую сверхустойчивость системы (3). После подстановки (4) в (3), замкнутая система принимает вид

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + g(x), \quad A_c = A + BK. \tag{5}$$

Для данных матриц A, B задача сверхстабилизации сводится к нахождению сверхстабилизирующей матрицы K, которая обеспечивается выполнение условий сверхустойчивости $\sigma(A_c) > 0$ для матрицы A_c замкнутой системы.

Применение условий сверхустойчивости к системе (5) ведет к ограничениям на элементы матрицы $A_c = A+BK$, которые не для каждой системы могут быть выполнены. Проверить возможность сверхстабилизации системы (то есть существование сверхстабилизирующего регулятора) можно следующими двумя способами.

1-й подход. Введем обозначение $A_c = A + H$, где $H = BK$, $H = (h_{ij}) \in R^{n \times n}$. Тогда сверхустойчивость матрицы A_c означает выполнение условий

$$-(a_{ii} + h_{ii}(K)) > \sum_{j \neq i} |a_{ij} + h_{ij}(K)|, \quad i = 1, ..., n, \tag{6}$$

где $h_{ij}(K) = (BK)_{ij} = b_i K$, b_i — i-я строка матрицы B. Введя дополнительные переменные σ и p_{ij}, $i = 1, ..., n$ условия сверхустойчивости (6) можно записать в эквивалентной форме. Для диагональных элементов матрицы A_c они запишутся в виде $-(a_{ii} + h_{ii}(K)) - \sum_{j \neq i} p_{ij} \geqslant \sigma > 0$, $i = 1, ..., n$, а для всех остальных $-p_{ij} \leqslant a_{ij} + h_{ij}(K) \leqslant p_{ij}$, $i, j = 1, ..., n$, $i \neq j$. Тогда матрица A_c будет сверхустойчивой, если при некотором $\sigma > 0$ полученная система условий имеет решение k_{ij}, p_{ij}, $i, j = 1, ..., n$. Проверку можно осуществить, решая задачу линейного программирования:

$$\max \sigma \tag{7}$$

$$-(a_{ii} + h_{ii}(K)) - \sum_{j \neq i} p_{ij} \geqslant \sigma > 0, \quad i = 1, ..., n,$$

$$-p_{ij} \leqslant a_{ij} + h_{ij}(K) \leqslant p_{ij}, \quad i, j = 1, ..., n, \quad i \neq j.$$

Переменными в задаче (7) являются матрицы $K, P = (p_{ij})$ и скаляр σ. Если задача линейного программирования имеет решение K^*, σ^* и при этом $\sigma^* > 0$, то управление $u = K^* x$ обеспечивает сверхустойчивость замкнутой системы (5). Величина $\sigma^* =$

$= \sigma(A + BK^*)$ является лучшей оценкой, при которой состояние системы удовлетворяет условию $||x(t)|| \leqslant ||x(0)||e^{-\sigma^* t}$. Если же решение задачи дает $\sigma^* \leqslant 0$, то это означает, что сверхстабилизация невозможна.

2-й подход. Рассмотрим систему $\dot{x} = Ax + g(x)$. Предполагается, что система демонстрирует хаотическую динамику и матрица A неустойчива. Если сверхустойчивость достижима, то для данной неустойчивой матрицы A должно существовать не пустое множество матриц $S = \{W\}$, $W = (w_{ij}) \in R^{n\times n}$, которые дают для матриц $\widetilde{A} = A + W$ выполнение условий сверхустойчивости

$$-(a_{ii} + w_{ii}) > \sum_{j\neq i} |a_{ij} + w_{ij}|, \quad i = 1, ..., n. \tag{8}$$

У хаотических систем матрица A часто оказывается разреженной (часть a_{ij} равны нулю). Учтем это, ограничив выбор матриц W, которые обеспечивают трансформацию элементов матрицы A по правилу $a_{ij} \to a_{ij} + w_{ij}$. Пусть дополнительно к условиям (8) элементы матриц W удовлетворяют условию

$$w_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0. \tag{9}$$

Ограничение (9) позволяет построить матрицу W, которая структурно эквивалентна A. Определим расстояние между неустойчивой матрицей A и сверхустойчивой матрицей $\widetilde{A} = A + W$ как $dist(A, \widetilde{A}) = ||A - \widetilde{A}|| = ||W||$, где $||\cdot||$ — евклидова матричная норма. Тогда сверхстабилизируемость можно подтвердить (или опровергнуть) решением задачи квадратичного программирования: $\min ||W||$ *с ограничениями* (8) (9). Если решение W^* задачи существует, то сверхустойчивость достижима и для данной неустойчивой матрицы A находится ближайшая к ней сверхустойчивая матрица $\widetilde{A}^* = A + W^*$. Одновременно с этим для системы находится сверхстабилизирующий регулятор $u = Kx$, который обеспечивает сверхустойчивость матрицы $A_c = A + BK$ при $B = I$ и $K = W^*$.

Оба рассмотренных подхода позволяют найти сверхстабилизирующее управление, если оно существует. Первый подход позволяет непосредственно проверить может ли данный регулятор (матрица B задана) стабилизировать систему. Второй подход более общий и одновременно конструктивный. Его применение позволяет узнать, возможна ли сверхстабилизация в принципе.

2.3. Класс сверхстабилизируемых хаотических и гиперхаотических систем

Перебор различных хаотических систем с использованием метода коррекции параметров [33] показывает [34], что сверхустойчивость является редким свойством и может рассматриваться как основание для дополнительной классификации хаотических систем. В работе [31] показано, что возможность осуществления сверхстабилизации в первую очередь определяется особенностями структуры матрицы A. А именно, задача квадратичного программирования (см. подход 2 выше) всегда имеет решение, если для диагональных элементов матрицы A выполнено $a_{ii} \neq 0$. Действительно, если $a_{ii} \neq 0$, то всегда можно подобрать такие w_{ii}, чтобы условия (8) выполнялись. Этот вывод можно использовать в качестве критерия отбора сверхстабилизируемых хаотических и гиперхаотических систем. В общем случае класс сверхстабилизируемых систем можно записать в виде

$$\dot{x} = Ax + g(x) = Ax + x_1 G_1 x + x_2 G_2 x + ... + x_n F_n x,$$

где $x \in R^n$, $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$, $a_{ii} \neq 0$, $G_q = (f_{ij}^q) \in R^{n\times n}$, $q = 1, ..., n$.

Среди хаотических систем с размерностью фазового пространства $n = 3$ примером сверхстабилизируемой системы является

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} x + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^T$. При $a_{12}a_{21} > 0$, $a_{12}a_{21} < 0$ и $a_{12}a_{21} = 0$ общая система приводит к известным хаотическим системам Лоренца, Чена и Лю соответственно [35]. Результаты анализа и пример сверхстабилизации этих систем представлены в [32].

Поиск или конструирование также можно вести среди систем, размерность фазового пространства которых $n = 4$. Приведем несколько примеров сверхстабилизируемых гиперхаотических систем: система Li [3]: $\dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_4$, $\dot{x}_2 = b_1x_1 - x_1x_3 + b_2x_2$, $\dot{x}_3 = -cx_3 + x_1x_2$, $\dot{x}_4 = x_2x_3 + dx_4$; система Jia [20]:

$$\dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_4,\ \dot{x}_2 = bx_1 - x_1x_3 - x_2,\ \dot{x}_3 = -cx_3 + x_1x_2,\ \dot{x}_4 = -x_1x_3 + dx_4. \qquad (10)$$

Приведенный список гиперхаотических систем, для которых возможно сверхустойчивое поведение, не конечен и может быть дополнен. Пример сверхстабилизации системы (10) будет рассмотрен ниже.

3. Робастный анализ и сверхстабилизация

Перейдем к рассмотрению ситуации, когда имеет место неопределенность, вызываемая неточностями знания значений параметров системы. Пусть вместо их точных значений известны только интервалы их возможных изменений, и неопределенность сконцентрирована в линейной части системы. Тогда неопределенная система запишется в виде

$$\dot{x} = (A_0 + \gamma\Delta)x + g(x), \qquad (11)$$

где $A_0 = (a_{ij}^0) \in R^{n\times n}$ — номинальная матрица, $\Delta = (\delta_{ij}) \in R^{n\times n}$ — матрица значений неопределенных факторов с элементами $|\delta_{ij}| \leqslant l_{ij}$, $l_{ij} \geqslant 0$ — заданные числа, $\gamma \geqslant 0$ — размах неопределенности.

Допустим, что номинальная система $\dot{x} = A_0x + g(x)$ сверхустойчива. Тогда для системы (11) приходим к задаче робастной устойчивости интервального семейства матриц $A = A_0 + \gamma\Delta$: *требуется найти наибольшее значение радиуса устойчивости* γ^{st} *, для которого робастная устойчивость сохраняется при* $\gamma < \gamma^{st}$. Применение условий сверхустойчивости предоставляет эффективный способ решения этой сложной проблемы.

Т е о р е м а 1. *Пусть матрица* A_0 *в* (11) *сверхустойчива. Тогда неопределенная система* (11) *робастно сверхустойчива для всех*

$$\gamma < \gamma^* = \min_i \frac{-a_{ii}^0 - \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}^0|}{\sum\limits_j l_{ij}}, \quad i = 1, ..., n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если матрица A_0 сверхустойчива, то

$$\sigma(A_0) = \min_i \left(-a_{ii}^0 - \sum_{j\neq i} |a_{ij}^0| \right) > 0,\ i = 1, ..., n,$$

и сохранение сверхустойчивости для матричного семейства $A = A_0 + \gamma\Delta$ означает выполнение условий $-(a_{ii}^0 + \gamma\delta_{ii}) - \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}^0 + \gamma\delta_{ij}| > 0$, $i = 1, ..., n$. Они будут выполнены, если $-a_{ii}^0 - \gamma l_{ii} - \sum\limits_{j\neq i} \left(|a_{ij}^0| + \gamma l_{ij} \right) > 0$. Отсюда имеем оценку для γ^* .

Таким образом, условия сверхустойчивости позволяют получить полное решение задачи робастной устойчивости систем с интервальной неопределенностью. Величина γ^* является нижней оценкой радиуса устойчивости γ^{st}. В частном случае, если масштабы изменения всех элементов матриц A_0 одинаковы, то есть $l_{ij} \equiv 1$, получим $\gamma^* = \sigma(A_0)/n$. Вычисление значения γ^* дает необходимую информацию, на основании которой можно судить о сохранении системой сверхустойчивости при наличии неопределенности в точном измерении параметров системы. Отметим, что замена требования сохранения сверхустойчивости на устойчивость значительно усложняет задачу, превращая ее в NP-сложную.

Не менее просто решается задача синтеза сверхстабилизирующего регулятора при наличии параметрической неопределенности. Рассмотрим неопределенную управляемую систему

$$\dot{x} = (A_0 + \gamma\Delta)x + g(x) + Bu. \tag{12}$$

Предположим, что номинальная система ($\gamma \equiv 0$) сверхстабилизируема обратной связью $u = Kx$ и матрица замкнутой системы $A_c^0(K) = (a_{ij}^0(K)) = A_0 + BK$ сверхустойчива. Тогда неопределенная система (12) робастно свехрстабилизируема данной обратной связью, если сверхустойчивость сохраняется для семейства матриц $A_c = A_c^0(K) + \gamma\Delta$. Это означает, что при всех допустимых Δ должны выполняться условия

$$-a_{ii}^0(K) - \gamma\delta_{ii} - \sum_{j\neq i} |a_{ij}^0(K) + \gamma\delta_{ij}| > 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Т е о р е м а 2. *Пусть номинальная система в* (12) *свехрстабилизируема обратной связью* $u = Kx$ *и задача линейного программирования* (7) *имеет решение* $\sigma^* = \sigma(A_c^0(K^*)) > 0$, K^*. *Тогда неопределенная система* (12) *робастно сверхстабилизируема, если*

$$\gamma < \gamma_{K^*} = \min_i \frac{-a_{ii}^0(K^*) - \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}^0(K^*)|}{\sum\limits_j l_{ij}}, \quad i = 1, ..., n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о совпадает с доказательством теоремы 1. Только вместо условий сохранения сверхустойчивости для $A = A_0 + \gamma\Delta$ следует рассматривать аналогичные условия для матриц $A_c = A_c^0 + \gamma\Delta$.

Решение задачи (7) дает для системы сверхстабилизирующую матрицу K^*, которой соответствует максимально возможная величина $\sigma(A_{cl}^0(K^*)) > 0$. Поэтому для неопределенной системы (12) величина γ_{K^*} будет максимальным радиусом робастности. В частности, если $l_{ij} \equiv 1$, то $\gamma_{K^*} = \sigma(A_c^0(K^*))/n$.

4. Пример сверхстабилизации

Построим сверхстабилизирующий регулятор для системы (10), которую запишем в виде

$$\dot{x} = A_0x + x_1G_1x,$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -a & a & 0 & 1 \\ b & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система демонстрирует гиперхаотическое поведение при $a = 10$, $b = 28$, $c = 8/3$, $d = 1.3$ [20]. На рис. 1 показан аттрактор, который соответствует этой ситуации, когда система имеет два положительных показателя Ляпунова.

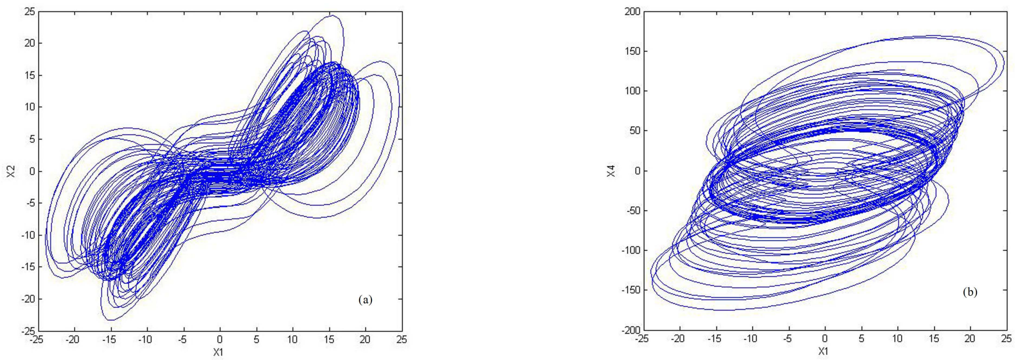

Рис. 1: Проекции аттрактора гиперхаотической системы (10): (a) плоскость x $_1 0 x_2$; (b) плоскость x $_1 0 x_4$.

В гиперхаотическом режиме условия сверхустойчивости для матрицы A_0 не выполнены. Собственные значения матрицы Якоби $J|_{x=0} = A_0$ равны -22.8277 , 11.8277 , -2.6667 и 1.3000 . Добавляя в систему управление, приходим к системе

$$\dot{x} = A_0 x + x_1 G_1 x + Bu,$$

для которой требуется найти обратную связь $u = Kx$, стабилизирующую систему в нулевом состоянии равновесия. Выясним, существует ли матрица $K \in R^{4\times 4}$, которая может обеспечить выполнение условий сверхустойчивости для матрицы замкнутой системы $A_c = A_0 + BK$. Рассматривая матрицу A_0 , можно видеть, что $a_{ii}^0 \neq 0$. Тогда, если выбрать $B = I$ (см п.2.2), то матрица $K_s = diag(k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{44})$ будет сверхстабилизирующей. Действительно, рассматривая условия сверхустойчивости для матрицы A_c

$$\sigma_1 = -(-a + k_{11}) - a - 1 > 0, \quad \sigma_2 = -(-1 + k_{22}) - b > 0,$$

$$\sigma_3 = -(c + k_{33}) > 0, \quad \sigma_4 = -(d + k_{44}) > 0$$

становится понятно, что сверхстабилизацию будут обеспечивать

$$k_{11} = -1 - \sigma_1, \quad k_{22} = 1 - b - \sigma_2, \quad k_{33} = -c - \sigma_3, \quad k_{44} = -d - \sigma_4.$$

При этом значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 > 0$ можно выбрать так, чтобы обеспечивался желаемый запас устойчивости системы.

На рис. 2 показаны результаты численного моделирования контролируемой гиперхаотической системы, с начальным условием $x(0) = (5, 5, 5, 5)$. Как видно, найденный контролер с выбранной степенью сверхустойчивости $\sigma_1 = ... = \sigma_4 = 0.5$ стабилизирует систему так, что на начальном этапе переходного процесса не происходит эффект всплеска.

Допустим, что ненулевые системные параметры в матрице $A = A_0 + \gamma\Delta$ имеют неопределенность $a_{ij} = a_{ij}^0 + \gamma\delta_{ij}$, $|\delta_{ij}| \leqslant l_{ij}$, где a_{ij}^0 — номинальные значения параметров, для которых выше был построен сверхстабилизирующий регулятор. Пусть $l_{ij} \equiv 1$. Тогда неопределенная система $\dot{x} = (A_0 + \gamma\Delta)x + x_1 G_1 x + Bu$ робастно сверхстабилизируема обратной связью $u = K_s x$, если $\gamma < \sigma(A_c^0)/n$. Поскольку $\sigma(A_c^0) = 0.5$, имеем $\gamma < 0.125$.

5. Заключение

Представлен метод анализа и управления гиперхаотическими системами, целью которого является обеспечение их сверхустойчивости. Показано, что условия сверхустойчивости

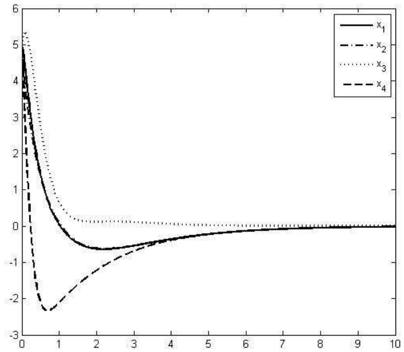

Рис. 2: Результат сверхстабилизации гиперхаотической системы (9).

есть эффективное средство для решения задач робастного анализа и синтеза гиперхаотических систем с параметрической неопределенностью. Приведен пример синтеза сверхстабилизирующего регулятора, обеспечивающий заданные характеристики переходного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lü J., Chen G.* Generating multiscroll chaotic attractors: Theories, methods and applications // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2006. 16(4). P. 775-858.

2. *Yu H.J., Cai G.L., Li Y.X.* Dynamic analysis and control of a new hyperchaotic finance system // Nonlinear Dynamics. 2012. 67(3). P. 2171-2182.

3. *Li Y., Tang W.K.S., Chen G.* Generating hyperchaos via state feedback control // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. 15(10). P. 3367-3375.

4. *Chen Z., Yang Y., Qi G., Yuana Z.* A novel hyperchaos system only with one equilibrium // Physics Letters A. 2007. 360(6). P. 696-701.

5. *Qi G., van Wyk M.A., van Wyk B.J., Chen G.* On a new hyperchaotic system // Physics Letters A. 2008. 372(2). P. 124-136.

6. *Hu G.* Generating hyperchaotic attractors with three positive lyapunov exponents via state feedback control // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2009. 19(2). P. 651-660.

7. *Correia M.J., Rech P.C.* Hyperchaos in a new four-dimensional autonomous system // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2010. 20(10). P. 3295-3301.

8. *Li C., Sprott J.C.* Coexisting Hidden Attractors in a 4-D Simplified Lorenz System // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. 24(3). P. 1450034.

9. *Takahashi Y., Nakano H., Saito T.* A simple hyperchaos generator based on impulsive switching // IEEE Transactions on Circuits and Systems II. 2004. 51(9). P. 468-472.

10. *Yu S.M., Lü J.H., Chen G.R.* Theoretical design and circuit implementation of multidirectional multi-torus chaotic attractors // IEEE Transactions on Circuits and Systems I. 2007. 54. P. 2087-2098.

11. *Liu M., Feng J., Tse C.K.* A new hyperchaotic system and its circuit implementation // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2010. 20(4). P. 1201-1208.

12. *Yujun N., Xingyuan W., Mingjun W., Huaguang Z.* A new hyperchaotic system and its circuit implementation // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010. 15(11). P. 3518-3524.

13. *Yu S., Lu J., Yu X., Chen G.* Design and implementation of grid multiwing hyperchaotic Lorenz system family via switching control and constructing super-heteroclinic loops // IEEE Transactions on Circuits and Systems I. 2012. 59(5). P. 1015-1028.

14. *Li Q., Hu S., Tang S., Zeng G.* Hyperchaos and horseshoe in a 4D memristive system with a line of equilibria and its implementation // International Journal of Circuit Theory and Applications. 2014. 42(11). P. 1172-1188.

15. *El-Sayed A.M.A., Nour H.M., Elsaid A., Matouk A.E., Elsonbaty A.* Circuit realization, bifurcations, chaos and hyperchaos in a new 4D system // Applied Mathematics and Computation. 2014. 239. P. 333-345.

16. *Yang L., Liu Z.R., Mao J.M.* Controlling hyperchaos // Physical Review Letters. 2000. 84(1). P. 67-70.

17. *Yan J.J.* H-infinity controlling hyperchaos of the Rossler system with input nonlinearity // Chaos, Solitons & Fractals. 2004. 21(2). P. 283-293.

18. *Li Y.X., Chen G.R., Tang W.K.S.* Controlling a unified chaotic system to hyperchaotic // IEEE Transactions on Circuits and Systems II. 2005. 52(4). P. 204-207.

19. *Yan Z.Y.* Controlling hyperchaos in the new hyperchaotic Chen system // Applied Mathematics and Computation. 2005. 168(2). P. 1239-1250.

20. *Jia Q.* Adaptive control and synchronization of a new hyperchaotic system with unknown parameters // Physics Letters A. 2007. 362 (5). P. 424-429.

21. *Yang Q., Zhang K., Chen G.* Hyperchaotic attractors from a linearly controlled Lorenz system // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2009. 10(3). P. 1601-1617.

22. *Dou F., Sun H., Duan W., Lü K.* Controlling hyperchaos in the new hyperchaotic system // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2009. 14(2). P. 552-559.

23. *Wang H.-X, Cai G.-L., Miao S., Tian L.-X.* Nonlinear feedback control of a novel hyperchaotic system and its circuit implementation // Chinese Physics B. 2010. 19(3). P. 030509.

24. *Wang X., Zhao G.* Hyperchaos generated from the unified chaotic system and its control // International Journal of Modern Physics B. 2010. 24(23). P. 4619-4637.

25. *Zhu C.* Controlling hyperchaos in hyperchaotic Lorenz system using feedback controllers // Applied Mathematics and Computation. 2010. 216(10). P. 3126-3132.

26. *Njah A.N.* Tracking control and synchronization of the new hyperchaotic Liu system via backstepping techniques // Nonlinear Dynamics. 2010. 61(1-2). P. 1-9.

27. *Effati S., Saberi Nik H., Jajarmi A.* Hyperchaos control of the hyperchaotic Chen system by optimal control design // Nonlinear Dynamics. 2013. 73(1-2). P. 499-508.

28. *Toopchi Y., Wang J.* Chaos Control and Synchronization of a Hyperchaotic Zhou System by Integral Sliding Mode control // Entropy. 2014. 16(12). P. 6539-6552.

29. *Поляк Б.Т, Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // Автоматика и Телемеханика. 2002. № 8. С. 37-53.

30. *Поляк Б.Т, Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. II. Синтез // Автоматика и Телемеханика. 2002. № 11. С. 56-75.

31. *Талагаев Ю.В., Тараканов А.Ф.* Сверхустойчивость и оптимальное многопараметрическое подавление хаотической динамики класса автономных систем с квадратичными нелинейностями // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 1. С. 148-152.

32. *Talagaev Y.V.* Robust analysis and superstabilization of chaotic systems // Proc. 2014 IEEE Conference on Control Applications. Antibes, France, Oct. 8-10. 2014. P. 1431-1436.

33. *Талагаев Ю.В., Тараканов А.Ф.* Стабилизация неустойчивых неподвижных точек оптимальной динамической коррекцией параметров хаотических систем // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2007. Т. 12. № 4. С. 529-530.

34. *Талагаев Ю.В.* Анализ условий сверхустойчивости и оптимальная коррекция параметров класса хаотических систем // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 55. № 1.1. С. 198-204.

35. *Lu J., Chen G., Cheng D.* A New Chaotic System and Beyond: The Generalized Lorenz-Like System // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004. 14(5). P. 1507-1537.

Поступила в редакцию 9 июня 2015 г.

Talagaev Yu.V. ROBUST STABILIZATION OF A CLASS OF CHAOTIC SYSTEMS BASED ON SUPERSTABILITY CONDITIONS

In the work, we present a superstability conditions based method of the analysis and control of hyperchaotic systems with parametric uncertainty. The constructive ways of checking the system achievability of the superstable dynamics are described. A class of superstabilizable hyperchaotic systems is defined. For this class we show the ways of using superstability conditions for the robust analysis and design of the superstabilizable controller, which provides the given characteristics of the transient response. The efficiency of the presented approach is proved by the numeric simulation result cited in the work.

Key words: hyperchaotic systems; superstability; robust stabilization.

Талагаев Юрий Викторович, Балашовский институт Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского, г. Балашов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики и информационных технологий, e-mail: shangyi@yandex.ru

Talagaev Yuri Viktorovich, Balashov Institute of Saratov State University, Balashov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Physics and Information Technology Department, e-mail: shangyi@yandex.ru