УДК 517.925.5

ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© **А.И. Перов, И.Д. Коструб**

Ключевые слова: устойчивость; системы дифференциальных уравнений; периодические решения; внедиагонально неотрицательные матрицы.

Рассматриваются признаки устойчивости периодических решений систем дифференциальных уравнений, основанные на теории внедиагонально неотрицательных матриц.

1. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор с вещественными или комплексными компонентами, а $\mathbf{A} = (a_{ij})$ есть произвольная квадратная $n \times n$-матрица с вещественными или комплексными элементами.

Выпишем соответствующие этой матрице характеристический многочлен и характеристическое уравнение

$$L_n(\lambda) \equiv \lambda^n + \sigma_1 \lambda^{n-1} + ... + \sigma_n = 0. \tag{1.2}$$

Напомним, что нулевое решение системы (1.1) *устойчиво по Ляпунову,* если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что

$$\text{из } \ ||\mathbf{x}(0)|| < \delta \ \text{ вытекает } \ ||\mathbf{x}(t)|| < \varepsilon \ \text{ при } \ 0 \leqslant t < +\infty. \tag{1.3}$$

Если имеет место не только (1.3), но и

$$||\mathbf{x}(t)|| \to 0 \ \text{ при } \ t \to +\infty, \tag{1.4}$$

то нулевое решение системы (1.1) называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову.*

Напомним, что многочлен n-й степени с вещественными или комплексными коэффициентами называется *гурвицевым*, или *многочленом Гурвица*, если для корней характеристического уравнения (1.2) выполнено следующее условие

$$\mathrm{Re}\ \lambda_k < 0, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{1.5}$$

Матрица называется *гурвицевой* или *матрицей Гурвица,* если имеют место (1.5).

Сделаем нововведение (в его пользу говорит приводимая ниже теорема 1.1). Назовём матрицу *ляпуновской*, или *матрицей Ляпунова,* если все её собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ лежат в открытой левой полуплоскости $\mathrm{Re}\ \lambda < 0$, или на мнимой прямой $\mathrm{Re}\ \lambda = 0$, причём в последнем случае им отвечают только простые элементарные делители:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\ \lambda_k < 0 \ \text{ или} \\ &\mathrm{Re}\ \lambda_k = 0 \ \text{ и этим } \ \lambda_k \ \text{ отвечают простые элементарные делители}, \quad k = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Многочлен n-й степени с вещественными или комплексными коэффициентами назовём *ляпуновским*, или *многочленом Ляпунова,* если имеют место (1.6).

Т е о р е м а 1. 1. *Система* (1.1) *с постоянными коэффициентами устойчива* (*в смысле Ляпунова*) *тогда и только тогда, когда матрица этой системы ляпуновская.*

Нулевое решение системы (1.1) *устойчиво по Дирихле* [1], если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что

$$\text{из } ||\mathbf{x}(0)|| < \delta \text{ вытекает } ||\mathbf{x}(t)|| < \varepsilon \text{ при } -\infty < t < +\infty. \tag{1.7}$$

Аналога асимптотической устойчивости (см. (1.4)) здесь нет.

Матрица называется *матрицей Дирихле,* если все её собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ лежат на мнимой прямой $\operatorname{Re}\lambda = 0$, причём им всем отвечают только простые элементарные делители:

$$\operatorname{Re}\lambda_k = 0 \text{ и } \lambda_k \text{ отвечают простые элементарные делители, } k = 1, 2, ..., n. \tag{1.8}$$

Многочлен n-й степени с вещественными или комплексными коэффициентами назовём *многочленом Дирихле,* если выполнено (1.8).

Т е о р е м а 1. 2. *Система* (1.1) *с постоянными коэффициентами устойчива* (*в смысле Дирихле, то есть выполнено* (1.7)) *тогда и только тогда, когда матрица этой системы есть матрица Дирихле.*

2. Внедиагонально неотрицательные матрицы. Напомним основные определения и теоремы (см. [2–5]). Вещественная квадратная $n \times n$-матрица $\mathbf{C} = (c_{ij})$ называется *внедиагонально положительной*, если

$$c_{ij} > 0 \text{ при } i \neq j, \tag{2.1}$$

и *внедиагонально неотрицательной*, если

$$c_{ij} \geqslant 0 \text{ при } i \neq j. \tag{2.2}$$

Максимум модуля собственных значений вещественной или комплексной квадратной $n \times n$-матрицы $\mathbf{C} = (c_{ij})$ называется её *спектральным радиусом*:

$$\operatorname{spr}\mathbf{C} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i(\mathbf{C})|, \tag{2.3}$$

где $\lambda_1(\mathbf{C}), ..., \lambda_n(\mathbf{C})$ — полный набор её собственных значений.

Т е о р е м а 2. 1. *Если* $\mathbf{C}$ — *внедиагонально положительная матрица* (*выполнено* (2.1)), *то существуют такое её вещественное собственное значение* α *и отвечающий ему собственный вектор* $\mathbf{h}$, *что*: $\mathbf{Ch} = \alpha\mathbf{h}$; $\operatorname{Re}\lambda < \alpha$ *для любого другого собственного значения* λ *матрицы* $\mathbf{C}$; $\mathbf{h} > \mathbf{0}$.

Т е о р е м а 2. 2. *Если* $\mathbf{C}$ — *внедиагонально неотрицательная* (*выполнено* (2.2)) *неразложимая матрица, то существуют такое вещественное её собственное значение* α *и отвечающий ему собственный вектор* $\mathbf{h}$, *что*: $\mathbf{Ch} = \alpha\mathbf{h}$; $\operatorname{Re}\lambda < \alpha$ *для любого другого собственного значения* λ *матрицы* $\mathbf{C}$; $\mathbf{h} > \mathbf{0}$, *причём вектор* $\mathbf{h}$ *определяется единственным образом.*

Т е о р е м а 2. 3. *Если* $\mathbf{C}$ — *произвольная внедиагонально неотрицательная* (*выполнено* (2.2)) *матрица, то существуют такое её вещественное собственное значение* α *и отвечающий ему собственный вектор* $\mathbf{h}$, *что*: $\mathbf{Ch} = \alpha\mathbf{h}$; $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \alpha$ *для любого другого собственного значения* λ *матрицы* $\mathbf{C}$; $\mathbf{h} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$.

Предлагается новый критерий гурвицевости (см. [6] или [7]).

Т е о р е м а 2. 4. *Вещественная внедиагонально неотрицательная матрица* $\mathbf{C} = (c_{ij})$ *является гурвицевой тогда и только тогда, когда диагональные элементы этой* *матрицы отрицательны* $c_{11} < 0, \;\; c_{22} < 0, \;\; c_{nn} < 0,$ *а спектральный радиус* (*см.* (2.3)) *неотрицательной матрицы* $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c_{12}}{c_{11}} & \ldots & -\frac{c_{1n}}{c_{11}} \\ -\frac{c_{21}}{c_{22}} & 0 & \ldots & -\frac{c_{2n}}{c_{22}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{c_{n1}}{c_{nn}} & -\frac{c_{n2}}{c_{nn}} & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ *меньше единицы. То есть выполнено следующее условие*:

$$\mathbf{0} \leqslant \mathbf{Q}, \;\; \operatorname{spr} \mathbf{Q} < 1. \tag{2.4}$$

Для проверки условия (2.4) можно воспользоваться критерием Мецлера–Котелянского [2, с. 335, упражнение 1]: $(\mathbf{I} - \mathbf{Q}) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & p \\ 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} > 0, \;\; p = 1, 2, ..., n.$

Далее будем дополнительно предполагать, что изучаемая матрица $\mathbf{C} = (c_{ij})$ является матрицей Ляпунова и не только внедиагонально неотрицательна, но и неразложима.

Т е о р е м а 2. 5. *Для того чтобы вещественная внедиагонально неотрицательная матрица* $\mathbf{C} = (c_{ij})$ *была ляпуновской, необходимо, чтобы все главные миноры матрицы* $-\mathbf{C}$ *были неотрицательны*:

$$(-1)^p \mathbf{C} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_p \end{pmatrix} \geqslant 0, \;\; \begin{array}{l} 1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_p \leqslant n; \\ p = 1, 2, ..., n. \end{array} \tag{2.5}$$

Если дополнительно предположить, что матрица $\mathbf{C}$ *является неразложимой, то условие* (2.5) *становится не только необходимым, но и достаточным.*

Отметим, что близкое утверждение опубликовано в сообщении [8].

Т е о р е м а 2. 6. *Вещественная квадратная внедиагонально неотрицательная матрица* $\mathbf{C} = (c_{ij})$ *является матрицей Дирихле тогда и только тогда, когда она нулевая*: $\mathbf{C} = \mathbf{0}$.

3. Основная оценка. Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ — вещественная или комплексная постоянная матрица и $\mathbf{C} = (c_{ij})$ — вещественная внедиагонально неотрицательная матрица, то есть

$$c_{ij} \geqslant 0 \text{ при } i \neq j. \tag{3.1}$$

Предположим, что имеют место следующие соотношения

$$\operatorname{Re} a_{ii} \leqslant c_{ii}, \;\; i = 1, 2, ..., n; \;\; |a_{ij}| \leqslant c_{ij} \text{ при } i \neq j. \tag{3.2}$$

Т е о р е м а 3. 1. *Пусть выполнены условия* (3.1), (3.2). *Тогда справедлива оценка*

$$|e^{t\mathbf{A}}| \leqslant e^{t\mathbf{C}} \;\; \textit{при} \;\; 0 \leqslant t < +\infty. \tag{3.3}$$

В оценке (3.3) справа стоит неотрицательная матрица; согласно (3.1), как известно, $e^{t\mathbf{C}} \geqslant \mathbf{0}$ при $0 \leqslant t < +\infty$. Так что оценка (3.3) корректна.

Отметим, что приводимые признаки удобны тем, что мы располагаем критериями (то есть необходимыми и достаточными условиями гурвицевости и ляпуновости вещественных внедиагонально неотрицательных матриц).

Т е о р е м а 3. 2. *В условиях теоремы* 3.1, *если матрица* $\mathbf{C}$ *гурвицева, то и матрица* $\mathbf{A}$ *гурвицева; если матрица* $\mathbf{C}$ *ляпуновская, то и матрица* $\mathbf{A}$ *ляпуновская. Более того, в условиях теоремы* 3.1 *имеет место и следующая оценка*

$$\operatorname{spa} \mathbf{A} \leqslant \operatorname{spa} \mathbf{C}. \tag{3.4}$$

В условии (3.4) $\operatorname{spa} \mathbf{A} = \lim\limits_{0<t<+\infty} \dfrac{\ln ||e^{t\mathbf{A}}||}{t}$ — *спектральная абсцисса* матрицы $\mathbf{A}$ (матрицы $\mathbf{C}$ соответственно).

4. Линейные системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \tag{4.1}$$

где $x_1, ..., x_n$ – компоненты вектора $\mathbf{x}$ из $\mathbb{R}^n$; $a_{ij}(t)$ – вещественные измеримые периодические с периодом $\omega > 0$ функции: $a_{ij}(t+\omega) = a_{ij}(t)$, $\mathbf{A}(t+\omega) = \mathbf{A}(t)$ суммируемые на отрезке $[0, \omega]$, причём матрица $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$ обладает свойством внедиагональной неотрицательности

$$a_{ij}(t) \geqslant 0 \text{ при } i \neq j. \tag{4.2}$$

При изучении многих вопросов для системы (4.1) используют обращение к более простой системе (так называемая усреднённая система)

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\xi_j, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad \dot{\xi} = \mathbf{C}\xi, \tag{4.3}$$

где $c_{ij} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega a_{ij}(t)dt$, $\mathbf{C} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \mathbf{A}(t)dt$, причём в силу (4.2) имеем $c_{ij}(t) \geqslant 0$ при $i \neq j$.

Как показывает приводимая ниже теорема, асимптотическая устойчивость усреднённой системы (4.3) с постоянными коэффициентами влечёт за собой асимптотическую устойчивость системы (4.1) с периодическими коэффициентами [9].

Т е о р е м а 4. 1. *Если спектральный радиус неотрицательной матрицы*

$$\mathbf{R}(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k_1\omega}{1-e^{\omega c_{11}}}c_{12} & \dots & \frac{k_1\omega}{1-e^{\omega c_{11}}}c_{1n} \\ \frac{k_2\omega}{1-e^{\omega c_{22}}}c_{21} & 0 & \dots & \frac{k_2\omega}{1-e^{\omega c_{22}}}c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{k_n\omega}{1-e^{\omega c_{nn}}}c_{n1} & \dots & \frac{k_n\omega}{1-e^{\omega c_{nn}}}c_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

меньше единицы, то система (4.1) *асимптотически устойчива.*

В формуле (4.4) $k_i = \max\limits_{1 \leqslant \beta - \alpha \leqslant \omega} e^{\int\limits_\alpha^\beta a_{ii}(\sigma)d\sigma}$, $i = 1, 2, ..., n$. Ясно, что $k_i \geqslant 1$ (в статье [5] дополнительно предполагалось, что $a_{ii}(t) \leqslant 0$ при $i = 1, 2, ..., n$; поэтому в ней $k_i = 1$).

5. Нелинейные системы дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, ..., x_n), \quad i = 1, 2, ..., n; \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{5.1}$$

где $t \in \mathbb{R}$ – время, $\mathbf{x} = \operatorname{col}\,(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ есть вектор с компонентами $f_1(t, x_1, ..., x_n), ..., f_n(t, x_1, ..., x_n)$. Предположим, что правые части системы (5.1) непрерывны по t и имеют частные производные первого порядка по всем пространственным переменным $(x_1, x_2, ..., x_n)$; что изучаемая нами система близка к некоторой системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в том смысле, что можно указать такие вещественные числа c_{ij}, ($i, j = 1, 2, ..., n$), для которых справедливы следующие оценки

$$\frac{\partial f_i(t, x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} \leqslant c_{ii}; \quad \left|\frac{\partial f_i(t, x_1, ..., x_n)}{\partial x_j}\right| \leqslant c_{ij}, \quad i \neq j. \tag{5.2}$$

Вещественная квадратная $n \times n$-матрица $\mathbf{C} = (c_{ij})$ является внедиагонально неотрицательной; диагональные элементы этой матрицы могут быть и отрицательными; именно так будет обстоять дело, если мы потребуем, чтобы матрица $\mathbf{C}$ была гурвицевой. Последнее, как известно, имеет место тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$(-1)^k \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, ..., n \tag{5.3}$$

(критерий Севастьянова–Котелянского [10, с. 371]).

Т е о р е м а 5. 1. *Пусть правые части системы* (5.1) *условиям* (5.2) *и* (5.3). *Пусть* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *является ограниченной по* t *при всех* $\mathbf{x}$. *Тогда система* (5.1) *имеет единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}_0(t)$. *Для этого решения справедлива оценка*

$$|\mathbf{x}_0(t)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{t} e^{(t-s)\mathbf{C}} |\mathbf{f}(s, \mathbf{0})| ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Решение $\mathbf{x}_0(t)$ *равномерно асимптотически устойчиво в целом, причём для разности решений имеет место следующая оценка*

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{t} e^{(t-s)\mathbf{C}} |\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)| ds, \quad t \geqslant s. \tag{5.5}$$

Если дополнительно известно, что $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *является почти периодической по* t, *равномерно относительно* $\mathbf{x}$ *из любого ограниченного множества в* $\mathbb{R}$, *то решение* $\mathbf{x}_0(t)$ *почти периодическое, причём его группа частот включена в группу частот функции* $\mathbf{F}(t)$. *Если* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *является периодической по* t *с периодом* ω *при любом* $\mathbf{x}$ *из* $\mathbb{R}$, *то решение* $\mathbf{x}_0(t)$ *— периодическое с тем же самым периодом.*

Поясним коротко (подробнее см. [11]), о группе частот какой функции идёт речь в теореме. Пусть $\mathbf{r} > 0$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, причём $|\mathbf{x}_0(t)| \leqslant \mathbf{r}$ на всей прямой $\mathbb{R}$. Обозначим через C банахово пространство непрерывных отображений шара $|\mathbf{x}| \leqslant \mathbf{r}$ в $\mathbb{R}^m$ с равномерной нормой. Правая часть $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ порождает функцию $\mathbf{F} : \mathbb{R} \to C$, если положить $\mathbf{F}(t)\mathbf{x} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$. Так как по условию $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ почти периодична по t равномерно относительно $|\mathbf{x}| \leqslant \mathbf{r}$, то $\mathbf{F}$ является почти периодической функцией со значениями в банаховом пространстве C (о почти периодической функции см. [11], [13]).

В заключение отметим, что требование дифференцируемости в теореме 5.1 может быть ослаблено и условия (5.2) заменены на

$$\frac{f_i(t, x_1, ..., x_n) - f_i(t, y_1, ..., y_n)}{x_i - y_i} \leqslant c_{ii} \text{ при } x_i \neq y_i \text{ и } x_j = y_j \text{ при } j \neq i,$$

$$|f_i(t, x_1, ..., x_n) - f_i(t, y_1, ..., y_n)| \leqslant \sum_{j \neq i} c_{ij} |x_j - y_j| \text{ при } x_i = y_i, \ \ i = 1, 2, ..., n. \tag{5.6}$$

Из анализа доказательства теоремы 5.1 вытекает (см. [11]), что высказанные в ней утверждения имеют место и при меньших ограничениях.

Т е о р е м а 5. 2. *Пусть правые части* $f_i(t, x_1, ..., x_n)$, $i = 1, 2, ..., n$, *системы* (5.1) *заданы при* $t \in \mathbb{R}$ *и* $|\mathbf{x}| \leqslant \mathbf{r}$, *где* $\mathbf{r}$ *– некоторый положительный фиксированный вектор из* $\mathbb{R}^n$, *непрерывны по времени* t *и удовлетворяют условиям* (5.6) *по пространственным* *переменным* $x_1, ..., x_n$. *Пусть внедиагонально неотрицательная матрица* $\mathbf{C} = (c_{ij})$ *удовлетворяет условиям* (5.3) *Пусть, наконец, выполнено условие*

$$\int\limits_{-\infty}^{t} e^{(t-s)\mathbf{C}}|\mathbf{f}(s, \mathbf{0})|ds \leqslant \mathbf{r}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Тогда существует единственное ограниченное решение $\mathbf{x}_0(t)$ *системы* (5.1), *лежащее в шаре* $|\mathbf{x}| \leqslant \mathbf{r}$ ($\mathbf{r}$ *из условия* (5.7)). *Для этого решения справедлива оценка* (5.4). *Решение* $\mathbf{x}_0(t)$ *равномерно асимптотически устойчиво, и для разности решений имеет место оценка* (5.5).

Если $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *почти периодична по* t, *равномерно относительно* $\mathbf{x}$, $|\mathbf{x}| \leqslant \mathbf{r}$, *то решение* $\mathbf{x}_0(t)$ *почти периодично, причём его группа частот включена в группу частот правой части системы* (5.1). *Если* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *периодична по* t *с периодом* $\omega > 0$ *при* $|\mathbf{x}| \leqslant \mathbf{r}$, *то решение* $\mathbf{x}_0(t)$ – *периодическое с тем же самым периодом.*

6. Нелинейные системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Рассмотрим системы (для начала вещественные) нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, ..., x_n), \quad i = 1, 2, ..., n; \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{6.1}$$

где правые части периодичны по t с периодом $\omega > 0$:

$$f_i(t + \omega, x_1, ..., x_n) = f_i(t, x_1, ..., x_n), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{6.2}$$

и удовлетворяют условиям Каратеодори. Предположим ещё, что частные производные по пространственным переменным $\partial f_i(t, x_1, ..., x_n)/\partial x_j$ существуют и удовлетворяют условиям Каратеодори.

Т е о р е м а 6. 1. *Пусть выполнены условия*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i(t, x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} &\leqslant a_{ii}(t), \quad i = 1, 2, ..., n, \\ \left|\frac{\partial f_i(t, x_1, ..., x_n)}{\partial x_j}\right| &\leqslant a_{ij}(t), \qquad i \neq j, \end{aligned} \tag{6.3}$$

где вещественные функции $a_{ij}(t)$ *являются измеримыми* ω*-периодическими:*

$$a_{ij}(t + \omega) = a_{ij}(t), \tag{6.4}$$

суммируемыми на отрезке $[0, \omega]$, *причём, как это следует из* (6.3), *матричная функция* $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$ *является внедиагонально неотрицательной.*

Тогда система нелинейных дифференциальных уравнений (6.1) *имеет единственное* ω*-периодическое решение* $\mathbf{x}_0(t)$, *и это решение асимптотически устойчиво по Ляпунову. Более того, справедлива оценка*

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leqslant \mathbf{U}(t)\mathbf{U}^{-1}(s)|\mathbf{x}(0) - \mathbf{y}(0)| \ \text{ при } t \geqslant s, \tag{6.5}$$

где в (6.5) $\mathbf{U}(t)$ *есть матрицант линейной системы* $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{z}$, *удовлетворяющий всем требованиям теоремы об асимптотической устойчивости;* $\mathbf{x}(t)$ *и* $\mathbf{y}(t)$ *есть любые два решения системы* (6.1).

Ранее эта теорема была опубликована в работе [7] при дополнительном предположении, что мажорирующая система есть система с постоянными коэффициентами, то есть типа систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Условия теоремы 6.1 могут быть несколько ослаблены. Предположим, что

$$\frac{f_i(t,x_1,...,x_n)-f_i(t,y_1,...,y_n)}{x_i-y_i} \leqslant a_{ii}(t), \;\; i=1,2,...,n, \;\; \text{при} \;\; x_i \neq y_i \;\; \text{и} \;\; x_j = y_j \;\; \text{при} \;\; j \neq i,$$

$$|f_i(t,x_1,...,x_n)-f_i(t,y_1,...,y_n)| \leqslant \sum_{j\neq i} a_{ij}(t)|x_j-y_j| \;\; \text{при} \;\; x_i = y_i, \;\; i=1,...,n, \qquad (6.6)$$

где $(a_{ij}(t))$ удовлетворяют ранее сделанным предположениям (6.4). Тогда в формулировке теоремы 6.1 условие (6.3) можно заменить на условие (6.6). Некоторые теоремы такого типа указаны в работе [12, с. 327–333].

Завершим наше изложение рассмотрением комплексных систем нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_i = f_i(t,z_1,...,z_n), \;\; i=1,2,...,n; \;\; \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{z}), \qquad (6.7)$$

где правые части периодичны по времени t с периодом $\omega>0$: $f_i(t+\omega,z_1,...,z_n) = f_i(t,z_1,...,z_n)$, $i=1,2,...,n$, и удовлетворяют условиям Каратеодори (аналог (6.2)).

Т е о р е м а 6. 2. *Пусть выполнены условия*

$$\operatorname{Re} \frac{f_i(t,z_1,...,z_n)-f_i(t,\zeta_1,...,\zeta_n)}{z_i-\zeta_i} \leqslant c_{ii}(t) \;\; \textit{при} \;\; z_i \neq \zeta_i \;\; \textit{и} \;\; z_j = \zeta_j \;\; \textit{для} \;\; j \neq i,$$

$$|f_i(t,z_1,...,z_n)-f_i(t,\zeta_1,...,\zeta_n)| \leqslant \sum_{j\neq i} c_{ij}(t)\,|z_j-\zeta_j| \;\; \textit{при} \;\; z_i=\zeta_i, \;\; i=1,...n, \qquad (6.8)$$

где в (6.8) $\mathbf{C}(t) = (c_{ij}(t))$ – *вещественная, измеримая* ω*-периодическая суммируемая на отрезке* $[0,\omega]$ *матричная функция, обладающая свойством неотрицательности. И самое главное, система* $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{C}(t)\mathbf{z}$ *(вещественная) асимптотически устойчивая.*

Тогда система нелинейных дифференциальных уравнений (6.7) *имеет единственное* ω*-периодическое решение* $\mathbf{z}_0(t)$, *и это решение асимптотически устойчиво по Ляпунову. Более того, справедлива оценка*

$$|\mathbf{z}(t)-\zeta(t)| \leqslant \mathbf{U}(t)\mathbf{U}^{-1}(s)\,|\mathbf{z}(0)-\zeta(0)| \;\; \textit{при} \;\; t \geqslant s, \qquad (6.11)$$

где в (6.11) $\mathbf{U}(t)$ *есть матрицант системы* $\dot{\zeta} = \mathbf{C}(t)\zeta$ *(вещественной)* $\mathbf{z}(t)$ *и* $\zeta(t)$ — *любые два решения нелинейной системы* (6.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Перов А.И.* Об одном критерии устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Автоматика и телемеханика. 2013. № 2. С. 22–37.
2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
3. *Котелянский Д.М.* О некоторых свойствах матриц с положительными элементами // Математический сборник. 1952. № 31 (73). С. 495–506.
4. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
5. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.
6. *Коструб И.Д., Авдеева О.И.* О признаках асимптотической устойчивости // Теория, методология и концепция модернизации в экономике, управлении проектами, политологии, педагогике, психологии, праве, природопользовании, медицине, философии, филологии, социологии, математике, технике, физике : сб. науч. ст. по итогам Междунар. науч.-практ. конф. 26–27 сентября 2013 г. СПб, 2013. С. 211–215.
7. *Перов А.И., Коструб И.Д., Авдеева О.И.* Признаки асимптотической устойчивости // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики, посвящённая 95-летию Воронежского государственного университета : Материалы Междунар. конф. (Воронеж, 12–14 декабря 2013 г.) Воронеж, 2013. С. 21–30.

8. *Авдеева О.И.* Об одном критерии устойчивости // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронежской зимней математической школы / ВГУ; МГУ им. М. В. Ломоносова, Матем. институт им. В. А. Стеклова РАН. Воронеж, 2013. С. 310.

9. *Беседина Т.В., Макеенкова А.В., Баранов А.В.* Об одном критерии устойчивости линейной системы с периодическими коэффициентами // Труды молодых учёных ВГУ. 2007. Вып. 1–2. С. 4–5.

10. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.

11. *Перов А.И., Коструб И.Д.* Признаки устойчивости периодических решений систем дифференциальных уравнений, основные на теории внедиагонально неотрицательных матриц : учебное пособие. Воронеж: Научная книга, 2015.

12. *Кигурадзе И.Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Тбилиси: ТГУ, 1975.

13. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

14. *Перов А.И.* Дискретная теория устойчивости дискретных матриц // Препринт. 2012. № 45.

15. *Перов А.И., Дунаев С.А., Коструб И.Д.* Об одной теореме существования ограниченных, почти периодических и периодических решений // Вестник ф-та ПММ. Воронеж, 2002. Вып. 3. С. 160–170.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 13-01-00378).

Поступила в редакцию 1 июня 2015 г.

Perov A.I., Kostrub I.D. STABILITY TESTS FOR PERIODIC SOLUTIONS OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Tests of stability of periodic solutions for systems of differential equations based on the theory of off-diagonal nonnegative matrices are discussed.

Key words: stability of systems of differential equations, periodic solutions, off-diagonal nonnegative matrix.

Перов Анатолий Иванович, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейных колебаний, e-mail: anperov@mail.ru

Perov Anatoliy Ivanovich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Nonlinear Oscillations Department, e-mail: anperov@mail.ru

Коструб Ирина Дмитриевна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейных колебаний, e-mail: ikostrub@yandex.ru

Kostrub Irina Dmitrievna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Oscillations Department, e-mail: ikostrub@yandex.ru