Technologies, e-mail: Victor.Banderov@kpfu.ru

Калачева Наталья Вячеславовна, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, кандидат психологических наук, старший преподаватель кафедры общей математики, e-mail: nvkalacheva@gmail.com

Kalacheva Natalia Vyacheslavovna, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Candidate of Psychology, Senior Lecturer of the General Mathematics Department, e-mail: nvkalacheva@gmail.com

УДК 517.958

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ПОДЗЕМНОЙ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ВЫСОКОВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ СКВАЖИН

© И.Б. Бадриев, М.Т. Сингатуллин, Ю.В. Чебаков

Ключевые слова: теория фильтрации; высоковязкая жидкость; многозначный закон фильтрации; вариационное неравенство; итерационный метод, численный эксперимент.
Для решения смешанных вариационных неравенств, возникающих при описании нелинейных процессов фильтрации несжимаемой высоковязкой жидкости, следующей многозначному закону с предельным градиентом, предложен итерационный метод. Метод реализован численно. Проведены численные эксперименты для модельных задач фильтрации и их анализ.

Рассматривается установившийся процесс фильтрации несжимаемой высоковязкой жидкости в пористой среде, занимающей ограниченную область $\Omega \subset R^m$, $m \geqslant 2$, с липшиц-непрерывной границей Γ, на которой давление считается равным нулю. Предполагается, что в некоторой внутренней точке x^* области фильтрации Ω находится скважина с дебитом q, которую мы будем моделировать дельта-функцией Дирака. Необходимо найти стационарные поля давления u и скорости v жидкости, удовлетворяющие уравнению неразрывности $\operatorname{div} v = q\,\delta(x - x^*)$, $x \in \Omega$, и граничным условиям $u(x) = 0$, $x \in \Gamma$, в предположении, что жидкость подчиняется многозначному закону фильтрации (см. рис. 1) [1–4] $v = -g(|\nabla u|)\nabla u/|\nabla u|$. Предполагается, что функция g, задающая закон фильтрации имеет степенной рост порядка $p-1$, $p \geqslant 2$, на бесконечности.

Обобщенная постановка задач формулируется в виде смешанного вариационного неравенства с монотонным оператором и выпуклым, липшиц-непрерывным, вообще говоря, недифференцируемым, функционалом. Трудность, связанную с наличием источника удалось преодолеть благодаря введению вспомогательной задачи на шаре и аддитивного выделения особенности [5]. Исследована разрешимость вариационного неравенства.

Для решения вариационного неравенства применен итерационный метод расщепления [6–10], не требующий обращения исходного оператора. При этом каждый шаг итерационного процесса сводится фактически к решению краевой задачи для оператора Лапласа. Были построены конечноэлементные аппроксимации рассматриваемых задач и исследована их сходимость.

Следует отметить, что предложенные методы позволяют находить приближенные значения не только самого решения, но и его характеристик, для задач фильтрации — это

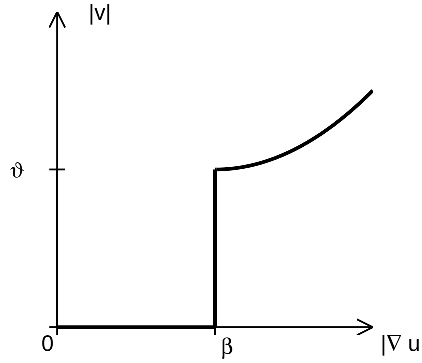

Рис. 1: Многозначный закон фильтрации

приближенные значения градиента решения, а также приближенные значения скоростей фильтрации на множествах, соответствующих точкам многозначности в законе фильтрации (в частности, с помощью приближенных значений градиента решения можно определять границы предельно-равновесных целиков остаточной вязко-пластической нефти [11, 12]), что весьма полезно с практической точки зрения. Для модельных задач фильтрации были проведены численные эксперименты. Проводилось изучение поведения границ застойных зон (множеств в области фильтрации, где модуль градиента решения — давления — меньше предельного) в зависимости от показателя $p-1$ роста степенной функции, задающей закон фильтрации.

На рис. 2 представлены результаты численных экспериментов. В центре области фильтрации Ω, представляющей из себя единичный квадрат, находится скважина с заданным дебитом $q = 1$. Выбирались следующие значения параметров в законе фильтрации: $\beta = 1$ (предельный градиент), $\vartheta = 0.5$ (величина скачка в законе фильтрации). В зоне течения ($|\nabla u| > \beta$) скорость фильтрации описывалась функцией $g(\xi) = \vartheta + (\xi - \beta)^{p-1}$. На рис. 2 показаны границы застойных зон при значениях показателя роста степенной функции $p = 2$ (слева) и $p = 5$ (справа). Как видно, застойные зоны с ростом p уменьшаются, что соответствует физической картине течения, так как при больших p течение интенсивнее.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алишаев М.Г.* О стационарной фильтрации с начальным градиентом // Теория и практика добычи нефти. М.: Недра, 1968. С. 202–211.

2. *Бадриев И.Б.* Математическое моделирование стационарных задач подземной фильтрации с многозначным законом // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2444–2446.

3. Бадриев И.Б., Нечаева Л.А. Математическое моделирование установившейся фильтрации с многозначным законом // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2013. № 3. С. 35–62.

4. *Бадриев И.Б., Фанюк Б.Я.* Математическое моделирование задач фильтрации с многозначным законом в многослойных пластах // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 5. С. 126–136.

5. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Исследование стационарной задачи фильтрации с многозначным законом при наличии точечного источника // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 7. С. 874–880.

6. *Badriev I.B.* On the Solving of Variational Inequalities of Stationary Problems of Two-Phase Flow in Porous Media // Applied Mechanics and Materials. 2013. V. 392. P. 183–187.

7. *Badriev I.B., Zadvornov O.A., Saddek A.M.* Convergence analysis of iterative methods for some variational inequalities with pseudomonotone operators // Differential Equations. 2001. Т. 37. № 7. С. 934–942.

8. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 8. С. 1115–1122.

9. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Исследование сходимости итерационного процесса для уравнений с

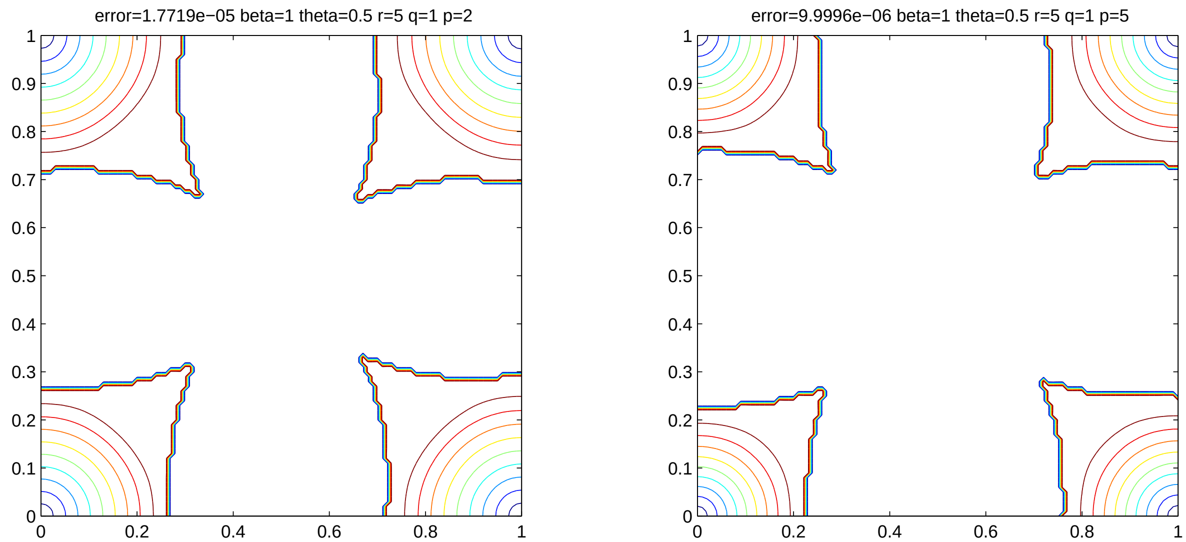

Рис. 2: Границы застойных зон: слева $p = 2$; справа $p = 5$

вырождающимися операторами // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. № 7. С. 898–901.

10. *Бадриев И.Б., Карчевский М.М.* Применение метода двойственности к решению нелинейных задач теории фильтрации с предельным градиентом // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 7. С. 1133–1144.

11. *Ентов В.М., Панков В.Н., Панько С.В.* Математическая теория целиков остаточной вязкопластичной нефти. Томск: Изд-во Томского государственного университета, 1989. 196 с.

12. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1982. 208 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 14-01-00755, 15-01-05686, 15-41-02315).

Поступила в редакцию 5 мая 2015 г.

Badriev I.B., Singatullin M.T., Chebakov J.V. NUMERICAL INVESTIGATION OF THE STEADY UNDERGROUND FILTRATION PROBLEM OF HIGH VISCOUS FLUIDS IN THE PRESENCE WELLS

To solve the mixed variational inequalities arising in the description of nonlinear processes of filtration of an incompressible high viscous fluid following multi-valued law with limiting gradient, an iterative method is proposed. The method is implemented numerically. Numerical experiments for modeling filtration problems and their analysis are carried out.

Key words: filtration theory; high viscous fluid; multi-valued filtration law; variational inequality; iterative method; numerical experiment.

Бадриев Ильдар Бурханович, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, e-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

Badriev Ildar Burkhanovich, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Computing Mathematics Department, e-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

Сингатуллин Марсель Талгатович, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, аспирант кафедры вычислительной математики, e-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

Singatullin Marsel Talgatovich, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Computing Mathematics Department, e-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

Чебаков Юрий Владимирович, Усольский сельскохозяйственный техникум, с. Усолье, Самарская область, Российская Федерация, преподаватель, e-mail: yshk_chebakov@mail.ru

Chebakov Yurii Vladimirovich, Usolsky Agricultural College, Usolye, Samara region, the Russian Federation, Lecturer, e-mail: yshk_chebakov@mail.ru

УДК 517.929

О РАЗРЕШИМОСТИ НА ОСИ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© **А.С. Баландин**

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; запаздывание; разрешимость на оси.

Получено представление решения на оси автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием. Данная задача сводится к изучению расположения нулей характеристической функции этого уравнения на комплексной плоскости.

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, D_{loc} — пространство локально абсолютно непрерывных функций.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейное автономное однородное дифференциальное уравнение с ограниченным запаздыванием

$$\dot{x}(t) + \int_0^\omega x(t-s)\, dr(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $\omega > 0$, функция $r\colon [0, \omega] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ограниченной вариации, $r(0) = 0$. Интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса. Вариацию функции r обозначим $\rho = \int_0^\omega |dr(s)|$. Соответствующей заменой переменных к уравнениям вида (1) можно сводить различные классы сингулярных функционально-дифференциальных уравнений, рассматриваемых на конечном отрезке. Для таких уравнений вопросы однозначной разрешимости оказываются нетривиальными.

Оставаясь в рамках традиционного понимания решения дифференциальных уравнений, мы предполагаем, что производная в уравнении (1) должна существовать в классическом смысле. Нам представляется наиболее удачным считать решение уравнения (1) принадлежащим классу локально абсолютно непрерывных функций D_{loc} (подробнее об этом см. [1]).

Известно (см. [2, с. 73], [3, с. 98]), что на $\mathbb{R}_+$ решения уравнения (1) имеют оценку:

$$|x(t)| \leqslant x(0)e^{\rho t}.$$

При изучении уравнений вида (1) на положительной полуоси эта оценка оказывается очень полезной (например, даёт возможность применять интегральные преобразования). Остаётся ли она справедливой на отрицательной полуоси? Ответ на этот вопрос даёт следующий пример, идея которого принадлежит Е.И. Бравому.