Чернов Андрей Владимирович, Нижегородский государственный университет, Нижегородский государственный технический университет, г. Нижний Новогород, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и оптимального управления (ННГУ), доцент кафедры «Прикладная математика» (НГТУ), e-mail: chavnn@mail.ru

Chernov Andrey Vladimirovich, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Physics and Optimal Control Department, e-mail: chavnn@mail.ru

УДК 517.929

ТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© **К.М. Чудинов**

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; запаздывание; устойчивость; эффективные условия; точные условия.

Получены неулучшаемые достаточные условия устойчивости линейных скалярных неавтономных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и неотрицательным коэффициентом, имеющие вид интегральной оценки коэффициента на отрезках определенной длины.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + a(t)x\big(t - r(t)\big) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

для которого ниже везде полагаем $a(t) \geqslant 0$ и $r(t) \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$.

В середине XX века А.Д. Мышкис получил классический результат [1]: все решения уравнения (1) являются устойчивыми по Ляпунову, если $\sup_{t\geqslant 0} a(t) \sup_{t\geqslant 0} r(t) \leqslant 3/2$, и асимптотически устойчивыми, если $\inf_{t\geqslant 0} a(t) > 0$ и $\sup_{t\geqslant 0} a(t) \sup_{t\geqslant 0} r(t) < 3/2$. Здесь константа $3/2$ является *точной*: утверждения об устойчивости станут неверными, если увеличить в неравенствах $3/2$ на произвольное $\varepsilon > 0$.

Результат Мышкиса стал первым в череде эффективных условий устойчивости неавтономных функционально-дифференциальных уравнений, выражаемых в явном виде через ограничения на параметры уравнения, для уравнения (1) — на функции a и r.

Среди результатов такого рода известен следующий [2]: если $r(t) \equiv \omega$, $a(t) \equiv a(t + 2\omega)$, то уравнение (1) асимптотически устойчиво при условии $0 < \int_0^{2\omega} a(t)\,dt < 2$. Нетрудно показать, что константа 2 в правой части неравенства является точной в указанном выше смысле. Обратим внимание, что длиной промежутка интегрирования является удвоенная величина запаздывания.

Недавно [3] было обнаружено, что последний результат является сужением на периодические уравнения условия устойчивости произвольных уравнений вида (1). В данной работе устанавливаются более точные соотношения между устойчивостью уравнения (1) и величиной $\int_{t-\Omega}^{t} a(s)\,ds$, где $\Omega \geqslant 2\omega = 2\sup_{t\geqslant 0} r(t)$.

Определим явно основные используемые далее предположения.

Функцию a полагаем локально суммируемой, функцию r — измеримой по Лебегу, решением уравнения (1) считаем локально абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющие равенству (1) при почти всех $t \geqslant 0$. Полагаем $\omega = \sup_{t \geqslant 0} r(t) < \infty$. Решение уравнения (1) однозначно определяется измеримой по Борелю ограниченной начальной функцией $\varphi\colon [-\omega, 0] \to \mathbb{R}$ при условии $x(\xi) = \varphi(\xi)$, $\xi \in [-\omega, 0]$. В силу линейности уравнения (1) ограниченность его решений при условии ограниченности начальной функции определяет устойчивость уравнения по Ляпунову.

Ради простоты и краткости изложения ограничимся получением условий такого вида устойчивости. Эти условия имеют вид нестрогих неравенств. Соответствующие строгие неравенства при естественных дополнительных предположениях дают условия асимптотической устойчивости.

1. Уравнения с неограниченным коэффициентом

Т е о р е м а 1. *Если* $\sup_{t \geqslant 2\omega} \int_{t-2\omega}^{t} a(s)\, ds \leqslant 2$, *то решения уравнения* (1) *ограничены.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть уравнение (1) имеет неограниченное решение x. Тогда найдутся $\varepsilon > 0$ и точки $t_1 > t_0 \geqslant 0$ такие, что $|x(t)| \leqslant M$ при всех $t \leqslant t_0$ и $t_1 = \inf\{t > t_0 : |x(t)| > M + \varepsilon\} < \infty$. В силу линейности уравнения без ограничения общности положим $M = 1$ и $x(t_1) = -1 - \varepsilon$.

Положим $A = \sup_{t \in [t_1 - 2\omega, t_1]} x(t)$, $B = \sup_{t \in [t_1 - \omega, t_1]} x(t)$. Тогда $A > B \geqslant 0$ (последнее неравенство — в силу уравнения (1) и определения t_1).

Зафиксируем точки $t_A \in [t_1 - 2\omega, t_1)$, $t_B \in [t_1 - \omega, t_1)$ такие, что $t_A \leqslant t_B$, $x(t_A) = A$, $x(t_B) = B$. Получаем:

$$\int_{t_1-2\omega}^{t_1} a(t)\, dt \geqslant \int_{t_A}^{t_1} a(t)\, dt \geqslant \int_{t_A}^{t_1-\omega} a(t) x\big(t - r(t)\big)\, dt + \frac{1}{A} \int_{t_B}^{t_1} a(t) x\big(t - r(t)\big)\, dt =$$
$$= -\int_{t_A}^{t_1-\omega} \dot{x}(t)\, dt - \frac{1}{A} \int_{t_B}^{t_1} \dot{x}(t)\, dt = x(t_A) - x(t_1 - \omega) + \frac{1}{A}\big(x(t_B) - x(t_1)\big) \geqslant$$
$$\geqslant (A - B) + \frac{1}{A}(1 + \varepsilon + B) = \left(A + \frac{1}{A}\right) + B\left(\frac{1}{A} - 1\right) + \frac{\varepsilon}{A} > 2.$$

Таким образом, если уравнение (1) имеет неограниченное решение, то указанное в условии неравенство неверно. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Для любых* $\Omega \geqslant 2\omega$ *и* $C > 2$ *найдется имеющее неограниченное решение уравнение* (1), *для которого* $\sup_{t \geqslant \Omega} \int_{t-\Omega}^{t} a(s)\, ds < C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Таковым является, например, уравнение (1), для которого $r(t) \equiv \omega$ и при $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$a(t) = \begin{cases} \frac{C/2+1}{\omega}, & t \in [k\Omega, k\Omega + \omega), \\ 0, & t \in [k\Omega + \omega, (k+1)\Omega). \end{cases}$$

Действительно, $\sup_{t \geqslant \Omega} \int_{t-\Omega}^{t} a(s) ds < C$, при этом решение, определяемое начальными значениями $x(t) = 1$, $t \in [-\omega, 0]$, неограниченно растет. Теорема доказана.

Теорема 2 показывает, что константа 2 в правой части неравенства в теореме 1 является точной, причем ее нельзя увеличить даже с одновременным увеличением константы 2 в нижнем пределе интеграла. Следующая теорема показывает, что эту последнюю константу 2 нельзя уменьшить.

Т е о р е м а 3. *Для любого* $\Omega \in (0, 2\omega)$ *найдется имеющее неограниченные решения уравнение* (1), *для которого* $\sup_{t \geqslant \Omega} \int_{t-\Omega}^{t} a(s)\, ds < 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для данного $\Omega \in (0, 2\omega)$ положим $\delta = (2\omega - \Omega)/2$.

Рассмотрим уравнение (1) с периодическими коэффициентом и запаздыванием. Именно, на промежутке $[0,3\omega)$ положим:

$$a(t)=\begin{cases}0, & t\in(\delta,\omega-\delta)\cup(\omega,2\omega-2\delta)\cup(2\omega-\delta,3\omega);\\ \frac{0{,}9}{\delta}, & t\in[0,\delta];\\ \frac{1{,}09}{\delta}, & t\in[\omega-\delta,\omega];\\ \frac{0{,}1}{\delta}, & t\in[2\omega-2\delta,2\omega-\delta];\end{cases}$$

$$r(t)=\begin{cases}0, & t\in(\delta,\omega-\delta)\cup(\omega,2\omega-2\delta)\cup(2\omega-\delta,3\omega);\\ t, & t\in[0,\delta]\cup[\omega-\delta,\omega];\\ t-\omega+\delta, & t\in[2\omega-2\delta,2\omega-\delta].\end{cases}$$

На полуоси $[3\omega,+\infty)$ продолжим значения функций a и r с периодом 3ω.

Решение полученного уравнения имеет период 6ω, а абсолютная величина решения — период 3ω. При начальном условии $x(0)=1$ на промежутке $[0,3\omega]$ имеем:

$$x(t)=\begin{cases}1-\frac{0{,}9}{\delta}t, & t\in[0,\delta);\\ 0,1, & t\in[\delta,\omega-\delta);\\ 0,1-\frac{1{,}09}{\delta}[t-\omega+\delta), & t\in[\omega-\delta,\omega);\\ -0,99, & t\in[\omega,2\omega-2\delta);\\ -0,99-\frac{0{,}01}{\delta}(t-2\omega+2\delta), & t\in[2\omega-2\delta,2\omega-\delta);\\ -1, & t\in[2\omega-\delta,3\omega].\end{cases}$$

Таким образом, получено уравнение, решение которого не стремится к нулю, при этом $\sup_{t\geqslant\Omega}\int_{t-\Omega}^{t}a(s)\,ds=1{,}99<2$. Нетрудно видеть, что, увеличив значение $0{,}1$ в определении функции $a(t)$ на величину $\varepsilon\in(0;0{,}01)$, получим уравнение, имеющее неограниченное решение, при этом указанное в условии неравенство сохранится. Теорема доказана.

Как уже было указано, замена знака нестрогого неравенства строгим в теореме 1 дает условие, близкое к достаточному условию асимптотической устойчивости уравнения (1). Наиболее тонким, на наш взгляд, уточнением этого факта является следующее.

Т е о р е м а 4. *Если* $\overline{\lim}_{t\to\infty}\int_{t-2\omega}^{t}a(s)\,ds<2$, *то для некоторых* $N,\gamma>0$ *фундаментальное решение* $X(t)$ *уравнения* (1) *при всех* $t\geqslant 0$ *подчинено оценке*

$$|X(t)|\leqslant Ne^{-\gamma\int_0^t a(s)\,ds}. \tag{3}$$

Техника доказательства подобного рода оценок восходит к работе [4].

2. Уравнения с ограниченным коэффициентом

В приведенных выше теоремах запаздывание $r(t)$ предполагается ограниченным, в отличие от коэффициента $a(t)$, при этом верхняя граница запаздывания ω участвует в формулировках.

Положим $a(t)\leqslant\alpha$ для всех $t\geqslant 0$. При таком ограничении теоремы 1, 2 и 4 сохраняют справедливость, теорема 3 — нет. Иными словами, значение 2ω в нижнем пределе интегрирования можно уменьшить, сохраняя справедливость условия ограниченности решений. Точной границей такого уменьшения является $2\omega-1/\alpha$, при условии $\alpha\omega\geqslant 2$ (заметим, что если $\alpha\omega\leqslant 3/2$, то все решения ограничены по теореме Мышкиса).

Т е о р е м а 5. *Если* $a(t)\leqslant\alpha$, *то для любых* $\alpha\geqslant 2/\omega$, $\Omega\in(0,2\omega-1/\alpha)$ *найдется имеющее неограниченное решение уравнение* (1), *для которого* $\sup_{t\geqslant\Omega}\int_{t-\Omega}^{t}a(s)\,ds<2$.

Доказательство. Для данного $\Omega \in (0, 2\omega - 1/\alpha)$ положим $\delta = \alpha(2\omega - 1/\alpha - \Omega)$ и выберем целое n такое, что $1,9 \cdot 10^{-n} < \delta$. На промежутке $[0, 3\omega)$ положим:

$$a(t) = \begin{cases} 0, & t \in (\frac{1-10^{-n}}{\alpha}, \omega - \frac{1+0,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}) \cup (\omega, 2\omega - \frac{1+1,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}) \cup (2\omega - \frac{1+0,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}, 3\omega); \\ \alpha, & t \in [0, \frac{1-10^{-n}}{\alpha}] \cup [\omega - \frac{1+0,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}, \omega] \cup [2\omega - \frac{1+1,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}, 2\omega - \frac{1+0,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}]; \end{cases}$$

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t \in (\frac{1-10^{-n}}{\alpha}, \omega - \frac{1+0,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}) \cup (\omega, 2\omega - \frac{1+1,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}) \cup \\ & \cup (2\omega - \frac{1+0,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}, 3\omega); \\ t, & t \in [0, \frac{1-10^{-n}}{\alpha}] \cup [\omega - \frac{1+0,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}, \omega]; \\ t - \omega + \frac{1+0,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}, & t \in [2\omega - \frac{1+1,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}, 2\omega - \frac{1+0,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}]. \end{cases}$$

На полуоси $[3\omega, +\infty)$ продолжим значения функций a и r с периодом 3ω.

Абсолютная величина решения полученного уравнения имеет период 3ω. При начальным условии $x(0) = 1$ на промежутке $[0, 3\omega]$ имеем:

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \alpha t, & t \in [0, \frac{1-10^{-n}}{\alpha}); \\ 10^{-n}, & t \in [\frac{1-10^{-n}}{\alpha}, \omega - \frac{1+0,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}); \\ 10^{-n} - \alpha(t - \omega + \frac{1+0,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}), & t \in [\omega - \frac{1+0,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}, \omega); \\ -1 + 10^{-n-1}, & t \in [\omega, 2\omega - \frac{1+1,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}); \\ -1 + 10^{-n-1} - \alpha(t - 2\omega + \frac{1+1,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}), & t \in [2\omega - \frac{1+1,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}, 2\omega - \frac{1+0,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}); \\ -1, & t \in [2\omega - \frac{1+0,9\cdot 10^{-n}}{\alpha}, 3\omega]. \end{cases}$$

Таким образом, получено уравнение, решение которого не стремится к нулю, при этом $\sup_{t \geqslant \Omega} \int_{t-\Omega}^{t} a(s)\, ds = 2 - 10^{n+1} < 2$. Сколь угодно малым изменением параметров нетрудно получить уравнение, имеющее неограниченное решение. Теорема доказана.

Аналоги теорем 1 и 4 для случая ограниченного запаздывания имеют следующий вид.

Теорема 6. *Если* $a(t) \leqslant \alpha$ *и* $\sup_{t \geqslant 0} \int_{t-2\omega+1/\alpha}^{t} a(s)\, ds \leqslant 2$, *то все решения уравнения* (1) *ограничены.*

Теорема 7. *Если* $\overline{\lim}_{t\to\infty} \int_{t-2\omega+1/\alpha}^{t} a(s)\, ds < 2$, *то для некоторых* $N, \gamma > 0$ *фундаментальное решение* $X(t)$ *уравнения* (1) *при всех* $t \geqslant 0$ *подчинено оценке* (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мышкис А.Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Математический сборник. 1951. Т. 28. № 3. С. 641-658.

2. *Долгий Ю.Ф., Шиманов С.Н.* О существовании зоны устойчивости для одного уравнения с запаздыванием // Устойчивость и нелинейные колебания: межвуз. сб. научн. тр. Уральск. гос. ун-та. Свердловск, 1988. С. 11-18.

3. *Чудинов К.М.* О точности достаточных условий устойчивости дифференциальных уравнений с запаздыванием // Изв. ИМИ УдГУ. 2012. № 1(39). С. 159-160.

4. *Малыгина В.В.* Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 10. С. 1716-1723.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (задание № 2014/152, проект № 1890) и поддержана грантом РФФИ (проект № 13-01-96050).

Поступила в редакцию 5 июня 2015 г.

Chudinov K.M. SHARP STABILITY CONDITIONS FOR NONAUTONOMOUS EQUATIONS WITH DELAY

We investigate unimprovable sufficient conditions of stability for linear scalar nonautonomous differential equations with retarded argument and nonnegative coefficient, in the form of the integral estimate of the coefficient along an interval of determined length.

Key words: differential equation; delay; stability; effective conditions; sharp conditions.

Чудинов Кирилл Михайлович, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: cyril@list.ru

Chudinov Kirill Mikhailovich, Perm National Research Polytechnical University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, e-mail: cyril@list.ru

УДК 532.546

ОПТИМИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ДЛЯ РАДИАЛЬНО–СИММЕТРИЧНОГО СЛУЧАЯ

© А.И. Шангараева, Д.В. Шевченко

Ключевые слова: многофазная фильтрация; радиальная симметрия; численный метод; число Куранта; разностная схема.

Рассмотрен алгоритм ускорения численных расчетов уравнений переноса для радиально-симметричного случая с использованием явной схемы. Предлагаемый подход ускорения времени расчетов основан на идее введения кратных шагов по времени при условии согласования их с числом Куранта. Приведено описание свойств и этапов алгоритма. Применение предложенного нами алгоритма позволит достичь существенного ускорения времени расчетов. Построена также зависимость количества расчетных шагов от радиуса.

Введение

В работе решается задача ускорения численных расчетов по явной схеме для уравнений переноса, используемого при моделировании нефтяных месторождений [1, 2]. При расчете реальных месторождений необходимо использовать сетки с большим числом узлов, что приводит к значительному увеличения объема вычислений.

Как известно, при использовании явной схемы для ее устойчивости необходимо выполнение условия Куранта. Выполнение этого условия требует существенного увеличения объема вычислений. Нами предлагается модификация этого условия, позволяющая получить ускорение времени вычислений. Верификация предлагаемого метода ускорения подробно описана в работах [3, 4] для плоско-параллельного случая, для которого существует автомодельное решение. Там же предлагается использовать разные шаги по времени и их количество в разных областях месторождения так, чтобы с одной стороны, уменьшить объем вычислений, а с другой стороны, обеспечить устойчивость разностных схем.

Достижения этих целей предполагается достичь путем введения локального числа Куранта и введения для различных областей фильтрации различных временных шагов.

В данной работе описанный подход применяется для радиальной задачи с целью отследить движение фронта насыщенности. Проведено сравнение предложенного алгоритма с классическим подходом и с ускорением.