15. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

16. *Casas E., Raymond J.-P., Zidani H.* Pontryagin's Principle for Local Solutions of Control Problems with Mixed Control-State Constraints // SIAM J. Control Optim. 2000. V. 39. № 4. P. 1182-1203.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом в рамках соглашения от 27 августа 2013 г. №02.B.49.21.0003 между Министерством образования и науки РФ и Нижегородским государственным университетом им. Н.И. Лобачевского.

Поступила в редакцию 9 июня 2015 г.

Gorshkov A.A. REGULARIZED PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE IN OPTIMAL CONTROL FOR A PARABOLIC EQUATION WITH PHASE CONSTRAINTS IN LEBESGUE SPACES

The stable with respect to the errors in the initial data sequential Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in a optimal control problem are considered. The target functional for this problem isstrictly uniformly convex, the control is distributed, the phase constraints are pointwised for a parabolic equation. The control is set from Lebesgue space of summable functions with $p \in (2, +\infty)$ degree. The restriction operators images are put to the Lebesgue space of summable functions with $s \in (1, 2)$ degree.

Key words: optimal control; parabolic equation; dual regularization; stability; point-wise phase constraint; Lebesgue space; Lagrange's principle; Pontryagin's maximum principle.

Горшков Андрей Александрович, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, аспирант, e-mail: tiger-nn@mail.ru

Gorshkov Andrey Aleksandrovich, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, the Russian Federation, Post-graduate Student, e-mail: tiger-nn@mail.ru

УДК 517.977

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

© **И.В. Гребенникова, А.Г. Кремлев**

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием; оптимальное управление; фундаментальная матрица.

Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием при интегральных квадратичных ограничениях на ресурсы управления. Предлагается процедура построения управляющего воздействия, аппроксимирующего оптимальное решение с заданной степенью точности относительно малого положительного параметра.

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_1(t)x(t-h) + B_1(t,\mu)u(t), \\ \mu dy(t)/dt &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_2(t)x(t-h) + B_2(t,\mu)u(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$; $x \in R^n$, $y \in R^m$; $u \in R^r$ — управление. Начальное состояние системы (1) $x(t) = \psi(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, где X_0, Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi(t) \in \Psi(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $\Psi(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов, непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. Управление $u(t)$, $t \in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$. В данном случае

$$P = \left\{ u(\cdot) \mid \int\limits_{t_0}^{t_1} u'(t)R(t)u(t)dt \leqslant \lambda^2 \right\}, \lambda = const > 0, \tag{2}$$

$R(t)$ — симметричная, положительно определенная матрица с непрерывными элементами; штрих — знак транспонирования.

Рассматривается минимаксная задача управления [1]: среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее

$$\varepsilon^0(t_1, \mu) = J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in P} J\big(u(\cdot)\big), \tag{3}$$

$$J\big(u(\cdot)\big) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi\Big(z\big(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot)\big)\Big),$$

где $\varphi(\cdot)$ заданная выпуклая функция (с конечными значениями); $z' = (x', y')$, $z\big(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot)\big)$, $t \in T$ — решение системы (1), исходящее из $Z_0 = X_0 \times Y_0$ при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$. Выполнено условие экспоненциальной устойчивости для подсистемы быстрых переменных.

Запишем систему (1) в виде:

$$dz(t)/dt = A(t, \mu)z(t) + G(t, \mu)z(t - h) + B(t, \mu)u(t),$$

где матрицы $A(t, \mu), B(t, \mu), G(t, \mu)$ имеют следующий блочный вид:
$A(t, \mu) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t)/\mu & A_{22}(t)/\mu \end{pmatrix}$, $B(t, \mu) = \begin{pmatrix} B_1(t, \mu) \\ B_2(t, \mu)/\mu \end{pmatrix}$, $G(t, \mu) = \begin{pmatrix} G_1(t) & 0 \\ G_2(t)/\mu & 0 \end{pmatrix}$.

Пусть $Z[t, \tau]$ есть фундаментальная матрица решений системы (1) (при $u \equiv 0$), причем $Z[\tau, \tau] = E$, $Z[t, \tau] = 0$ при $\tau > t$. Матрицу $Z[t, \tau]$ представим в следующем блочном виде:

$$Z[t, \tau] = \begin{pmatrix} Z_{11}[t, \tau] & Z_{12}[t, \tau] \\ Z_{21}[t, \tau] & Z_{22}[t, \tau] \end{pmatrix},$$

здесь $Z_{11}[t, \tau]$, $Z_{12}[t, \tau]$, $Z_{21}[t, \tau]$, $Z_{22}[t, \tau]$ — матрицы с размерами соответственно $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$, $\mathrm{n} \times \mathrm{m}$, $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$, $\mathrm{m} \times \mathrm{m}$.

Для реализации итерационной процедуры [2] построения оптимального решения задачи (3) важно правильно выбрать начальную асимптотику [3]. Аппроксимация оптимального решения при ограничениях (2) существенно зависит [2] от вида разложения матрицы $B_2(t, \mu)$ по параметру μ $(0 < \mu \leqslant \mu_0)$.

Проведем исследование для случая $B_1(t, \mu) = B_1(t), B_2(t, \mu) = \sqrt{\mu} B_2(t)$.

В основе предлагаемого метода лежат идеи выделения асимптотики ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы [4] и представления фундаментальной матрицы решений, разбитой на блоки в соответствии с размерностями быстрых и медленных пременных, в виде равномерно сходящейся последовательности [3].

В [3] приведены рекуррентные формулы для вычисления блоков $Z_{ij}^{(k)}[t, \tau]$ $(i, j = 1, 2), k = 0, 1, 2, \ldots$, определяющих асимптотику матрицы $Z[t, \tau]$ относительно малого параметра $\mu > 0$:

$Z_{11}^{(k+1)}[t,\tau] = X[t,\tau] - \int\limits_{\tau}^{t} \big(dZ_{12}^{(0)}[t,s]/ds\big) A_{22}^{-1}(s)\big(A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau] + G_2(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau]\big)ds;$

$Z_{22}^{(k+1)}[t,\tau] = Y[t,\tau] + \int\limits_{\tau}^{t} Z_{21}^{(k)}[t,s]A_{12}(s)Y[s,\tau]ds;$

$Z_{12}^{(k)}[t,\tau] = \int\limits_{\tau}^{t} Z_{11}^{(k)}[t,s]A_{12}(s)Y[s,\tau]ds;$

$Z_{21}^{(k)}[t,\tau] = (1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t} Y[t,s]\big(A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau] + G_2(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau]\big)ds;$

причем $Z_{11}^{(0)}[t,\tau] = X[t,\tau], Z_{22}^{(0)}[t,\tau] = Y[t,\tau],$
где $X[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений вырожденной системы (система (1) при $\mu = 0$), $X[\tau,\tau] = E$, $X[t,\tau] = 0$ при $\tau > t$,
$Y[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений системы $\mu dy/dt = A_{22}(t)y$, $Y[\tau,\tau] = E.$

Вычисляя в соответствии с [2], при $0 < \mu \leqslant \mu_0$, μ_0 достаточно мало, имеем:

$$\varepsilon^0(t_1) = \varepsilon^{(k)}(t_1) + O(\mu^{k+1}),$$

$$\varepsilon^{(k)}(t_1) = \max\{\chi^{(k)}(p,q) \mid p \in R^n, q \in R^m\} = \chi^{(k)}(p^{(k)},q^{(k)}), \qquad (4)$$

$\chi^{(k)}(p,q) = -h_{(k)}^{**}(p,q) - \lambda\big(\sigma_k(p,q)\big)^{1/2},\ \ k = 0,1,2,...;$
$h_{(k)}(p,q) = \varphi^*(p,q) - \rho\big[p'Z_{11}^{(k)}[t_1,t_0] + q'Z_{21}^{(k)}[t_1,t_0] \mid X_0\big] -$
$-\rho\big[p'Z_{12}^{(k)}[t_1,t_0] + q'Z_{22}^{(k)}[t_1,t_0] \mid Y_0\big] - \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \rho\big(r_h^{(k)}(\tau,t_1,p,q)|\Psi(\tau-h)\big)d\tau,$
$\sigma_k(p,q) = \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha_0(\mu)} r_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q;\mu)R^{-1}(\tau)r_1^{(k)\prime}(\tau,t_1,p,q;\mu)d\tau +$
$+ \int\limits_{0}^{\alpha_0(\mu)/\mu} r_2^{(k)}(s,t_1,p,q;\mu)R^{-1}(t_1-\mu s)r_2^{(k)\prime}(s,t_1,p,q;\mu)ds,$
где $\alpha_0(\mu) > 0:$ $\alpha_0 \to 0,\ \alpha_0(\mu)/\mu \to +\infty$ при $\mu \to +0$; функции $r_i^{(k)}(\tau,t_1,p,q;\mu),\ i = 1,2$, определяются следующим образом:
при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1 - \alpha_0(\mu),$
$r_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q;\mu) = (p'Z_{11}^{(k)}[t_1,\tau] + q'Z_{21}^{(k)}[t_1,\tau])B_0(\tau,\mu) + (1/\sqrt{\mu})q'Y[t_1,\tau]B_2(\tau) -$
$-\sqrt{\mu}\frac{d}{d\tau}\Big[p'Z_{12}^{(k-1)}[t_1,\tau] + (1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_1} q'Y[t_1,\sigma]A_{21}(\sigma)Z_{12}^{(k-1)}[\sigma,\tau]d\sigma\Big]A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau),$
при $0 \leqslant s < \alpha_0(\mu)/\mu,$
$r_2^{(k)}(s,t_1,p,q;\mu) = \sqrt{\mu}r_1^{(k)}(t_1-\mu s,t_1,p,q;\mu),$
$B_0(\tau,\mu) = B_1(\tau) - \sqrt{\mu}A_{12}(\tau)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau),$
$r_h^{(k)}(\tau,t,p,q) = \big(p'Z_{11}^{(k)}[t,\tau] + q'Z_{21}^{(k)}[t,\tau]\big)G_0(\tau) -$
$-\frac{d}{d\tau}\Big(p'Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau] + (1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_0+h} q'Y[t,s]A_{21}(s)Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau]ds\Big)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau),$
$G_0(\tau) = G_1(\tau) - A_{12}(\tau)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau);$
$\varphi^*(p,q)$ — функция, сопряженная к $\varphi(p,q)$; $h^{**}(p,q) = \overline{(co\ h)}(p,q)$ — замыкание выпуклой оболочки функции $h(p,q)$; $\rho(q|X)$ — опорная функция множества X на элементе q.

Рассмотрим управляющее воздействие $u_\mu^{(k)}(\cdot)$:

$$u_\mu^{(k)}(\tau) = \begin{cases} u^{(k)}(\tau), & t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1 - \alpha_0(\mu), \\ (1/\sqrt{\mu})v^{(k)}\big((t_1-\tau)/\mu\big), & t_1 - \alpha_0(\mu) < \tau \leqslant t_1, \end{cases}$$

$u^{(k)}(\cdot),\ \ v^{(k)}(\cdot)$ определяются условиями:

при $\tau \in [t_0, t_1 - \alpha_0(\mu)]$,

$$u^{(k)}(\tau) = -\lambda R^{-1}(\tau) r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)}) \big(\sigma_k(p^{(k)}, q^{(k)})\big)^{-1/2};$$

при $s \in [0, \alpha_0(\mu)/\mu]$,

$$v^{(k)}(s) = -\lambda R^{-1}(t_1 - \mu s) r_2^{(k)}(s, t_1, p^{(k)}, q^{(k)}) \big(\sigma_k(p^{(k)}, q^{(k)})\big)^{-1/2}.$$

Т е о р е м а. *Пусть выполнены следующие условия:*
1. Вырожденная система — система (1) *при* $\mu = 0$, *относительно управляема* [5] *на* T;
2. Для любого $t \in T$ $rank\{B_2(t_1,\mu),\ A_{22}(t_1)B_2(t_1,\mu), \ldots,\ A_{22}^{m-1}(t_1)B_2(t_1,\mu)\} = m$;
3. Максимум в (4) *достигается на векторе* $(l^{(k)})' = (p^{(k)'}, q^{(k)'})$ *таком, что* $r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)}) \neq 0,\ q^{(k)} \neq 0$.
Тогда задача (3) *разрешима, причем при* $0 < \mu \leqslant \mu_0$, μ_0 *достаточно мало, управляющее воздействие* $u_\mu^{(k)}(\cdot)$ *доставляет оценку*

$$\varepsilon^0(t_1) = J\big(u^0(\cdot)\big) = J\big(u_\mu^{(k)}(\cdot)\big) + O(\mu^{k+1}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

2. *Гребенникова И.В., Кремлев А.Г.* Об итерационном методе построения оптимального управления сингулярно возмущенными системами с запаздыванием при квадратичных ограничениях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. Саратов, 2011. Т. 11. Вып. 3. Ч. 1. С. 8–15.

3. *Гребенникова И.В.* Аппроксимация решения в минимаксной задаче управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Известия вузов. Математика. Казань, 2011. № 10. С. 28–39.

4. *Кремлев А.Г.* Асимптотические свойства ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы в задаче оптимального управления // Автоматика и Телемеханика. Москва, 1993. № 9. С. 61–78.

5. *Кириллова Ф.М., Чуракова С.В.* Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Докл. АН СССР. Москва, 1967. Т. 174. № 6. С. 1260–1263.

Поступила в редакцию 10 июня 2015 г.

Grebennikova I.V., Kremlev A.G. CONSTRUCTION OF OPTIMAL CONTROL FOR SINGULARLY PERTURBED SYSTEM WITH DELAY WITH INTEGRAL CONSTRAINTS

The problem of control for the singularly perturbed delay system with integral quadratic constraints on the control resources with the minimax criterion is considered. Procedure of constructing control response that approximates the optimal solution with given accuracy with respect to a small positive parameter is proposed.

Key words: singularly perturbed system with delay; optimal control; fundamental matrix.

Гребенникова Ирина Владимировна, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры информационных систем технологий, e-mail: giv001@mail.ru

Grebennikova Irina Vladimirovna, Ural Federal University, Ekaterinburg, the Russian Federation, Senior Lecturer of the Information Systems Technology Department, e-mail: giv001@mail.ru

Кремлев Александр Гурьевич, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры мультимедиа технологий, e-mail: kremlev001@mail.ru

Kremlev Aleksandr Gurevich, Ural Federal University, Ekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Multimedia Technology Department, e-mail: kremlev001@mail.ru