

13. Гусаренко С.А. Признаки разрешимости задач о накоплении возмущений для функционально-дифференциальных уравнений // Функционально-дифференц. уравнения: Межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Перм. политехн. ин-т, 1987. С. 30–40.

14. Андронов А.А., Майер А.Г. Простейшие линейные системы с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1946. Т. 7. № 2. З. С. 95–106.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке ЗАО «ПРОГНОЗ».

Поступила в редакцию 5 мая 2015 г.

Simonov P.M. TO A QUESTION ON STABILITY OF HYBRID FUNCTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH AFTEREFFECT

The abstract hybrid system of the functional differential equations is under discussion. W -method is used to obtain conditions for solvability of such systems in couples of spaces. Simple examples of two equations are considered. The problem is reduced to an equation with one variable.

Key words: hybrid system of functional differential equations; solvability in couple of spaces; model equations' method.

Симонов Петр Михайлович, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, e-mail: simpmp@mail.ru

Simonov Pyotr Mikhailovich, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Information Systems and Mathematical Methods in Economics Department, e-mail: simpmp@mail.ru

УДК 330.101.52

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕКТОРА «ДОМАШНИЕ ХОЗЯЙСТВА»

© П.М. Симонов, М.Н. Шульц

Ключевые слова: общее экономическое равновесие; вычислимые модели общего равновесия; домашние хозяйства.

В статье рассматривается использование общеравновесной теории для построения и анализа модели функционирования домашних хозяйств.

В последние десятилетия в экономической науке всё больший вес приобретают модели общего экономического равновесия. Данный класс моделей обладает рядом неоспоримых преимуществ, которые позволяют разрабатывать комплексные модели экономических систем.

В нашей статье мы рассмотрим существующие подходы к моделированию, а также предложим собственный способ описания поведения сектора домашние хозяйства.

В основе построения моделей общего экономического равновесия лежит принцип агентного описания экономики. Вся экономическая система представляется в виде взаимодействия и взаимосвязей между экономическими агентами. При этом каждый действующий субъект — экономический агент — ставит перед собой цели функционирования в экономике, и его поведение поддается математическому описанию.

Предметом рассмотрения является описание и моделирование поведения домашних хозяйств с использованием теории общего экономического равновесия.

Сектор «Домашние хозяйства» представляет собой репрезентативного агента, собственника факторов производства. Известны различные подходы к моделированию сектора домашних хозяйств: кейнсианская теория абсолютного дохода, теория относительного дохода Дьюзенбери, модель межвременного выбора Фишера, модель перманентного дохода Фридена, модель жизненного цикла Модильяни, модель случайного блуждания Холла и т. д.

В рамках неоклассического подхода предполагается, что целью деятельности сектора является максимизация функции полезности при заданном бюджетном ограничении. Как известно, в неоклассической теории функция полезности потребителя включает в себя объём потребленных товаров и услуг и количества свободного времени [1, с. 55]. Решением задачи является функция предложения труда и функция спроса на товары и услуги. Таким образом, решается статическая задача оптимизации: максимизация функции полезности U от реализации фактора производства труд L и потребления товаров C при бюджетном ограничении, где W — цена труда, A — автономные доходы, T — максимально возможное время работы, P — цена товаров:

$$U(C, L) \rightarrow \max, \quad W(T - L) + A = PC.$$

Распределение дохода между текущим и будущим потреблением осуществляется на основе степени предпочтения текущего потребления будущему и меры вознаграждения за отказ от текущего потребления (ставки процента δ) [1, с. 56]. Для решения такой задачи составляется функция суммарной дисконтированной полезности:

$$U = \sum_{t=1}^T \delta^t u(C_t) \rightarrow \max, \quad \sum_{t=1}^T C_t \leq A_0 + \sum_{t=1}^T Y_t,$$

где A_0 — сбережения в начальный момент времени, Y_t — доход домашнего хозяйства в момент времени t .

В статичной модели для того, чтобы «оправдать» сбережения, их необходимо добавить в функцию полезности. В противном случае любые расходы, не направленные на потребление товаров и услуг, уменьшают благосостояние домашнего хозяйства. Включение величины реальных сбережений в функцию полезности аналогично включению A . Пигу функции реальных кассовых остатков в функцию спроса домашних хозяйств [1, с. 226], или Д. Патинкиным — в функцию избыточного спроса [1, с. 230].

Следующее обстоятельство, которое попытался учесть в нашем описании поведения домашних хозяйств, — возможность срыва выплат по кредитам. В рамках стандартной неоклассической модели кажется выгодным для населения брать кредиты в банке и не возвращать их. Это увеличит покупательную способность населения, а следовательно, и благосостояния. Для того чтобы ограничить возможности домашних хозяйств по неконтролируемому наращиванию просроченной задолженности, была добавлена в функцию полезности домашних хозяйств величина l_{dkh} , которая снижает величину благосостояния. Негативное влияние переменной l_{dkh} на уровень полезности обосновывается как моральными «угрызениями совести», так и ответными мерами кредитных организаций по взысканию задолженности и по дискредитации злостных неплательщиков.

В качестве функциональной формы для функции полезности обычно принято использовать функции с постоянной эластичностью замены (CES), функции Кобба–Дугласа, функцию Леонтьева для товаров-дополнителей (комплементов) и так далее.

В модели использовалась функция полезности CES, поскольку все остальные представляют собой её частный вид:

$$U = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_{id} \cdot (C_i^d)^{\frac{\mu-1}{\mu}} + \sum_{i=1}^N \alpha_{if} (C_i^f)^{\frac{\mu-1}{\mu}} + \sum_{i=1}^N \alpha_{iL} \cdot \left(\frac{1}{L_i} \right)^{\frac{\mu-1}{\mu}} + \right. \\ \left. + \alpha_S \left(\frac{Dep_{-1} + S}{P} \right)^{\frac{\mu-1}{\mu}} + \alpha_{Cr} \left(\frac{Cr^{dkh-}}{Cr^{dkh}} \right)^{\frac{\mu-1}{\mu}} \right)^{\frac{\mu}{\mu-1}} \rightarrow \max,$$

где:

U — полезность;

N — количество видов товаров в экономике (производятся как секторами экономики, так и покупаются у «Внешнего мира»);

$\alpha_{id}, \alpha_{if}, \alpha_{iL}, \alpha_S, \alpha_{Cr}$ — параметры масштаба, $i = \overline{1, N}$;

μ — эластичность замещения;

C_i^d — количество потребляемого товара i -й отрасли, произведённого отечественной экономикой, $i = \overline{1, N}$;

C_i^f — количество потребляемого товара i -й отрасли, купленного за рубежом, $i = \overline{1, N}$;

L_i — численность занятых в i -й отрасли;

Dep_{-1} — величина депозитов на начало периода;

S — величина сбережений за текущий период;

P — текущий уровень цен;

Cr^{dkh-} — величина просроченных кредитов «Домашних хозяйств»;

Cr^{dkh} — величина кредитов «Домашних хозяйств».

Как было сказано выше, традиционно домашнее хозяйство рассматривается как собственник факторов производства, труда и капитала. Соответственно, домашнее хозяйство получает доходы от трудовой деятельности, а также доход от использования капитала в виде процентных платежей.

В модели эти компоненты конкретизируются с учетом специфики российской статистики. Так, среди доходов РосСтат выделяет доходы от трудовой деятельности, доходы от собственности, социальные трансферты. В последнее время всё более важным источником финансирования расходов домашних хозяйств становятся банковские потребительские и ипотечные кредиты. В качестве дохода от использования капитала мы использовали, в качестве дивидендов использовал долю прибыли прибыльных корпораций.

Расходы домашних хозяйств включают в себя расходы на покупку товаров услуг внутреннего и зарубежного (потребительский импорт) производства, расходы на обслуживание банковских кредитов, а также налоговые платежи и сбережения. Последняя компонента, в свою очередь, делится на изменения депозитов и вкладов в банках, а также на сбережения в виде наличных денег (предпочтение ликвидности).

Бюджетное ограничение в модели выглядит следующим образом:

$$\Psi = \sum_{i=1}^N P_i^d C_i^d + \sum_{i=1}^N P_i^f C_i^f + r_{Cr}^{dkh} \cdot Cr^{dkh} (1 - l_{dkh}) + \Delta Dep + T_{dkh} + \Delta M0 - \\ - (1 - t_{ndfl}) \sum_{i=1}^N W_i L_i - r_{Dep}^{dkh} \cdot Dep - \Delta Cr^{dkh} - Tr - (1 - t_{\Pi}) \sum_{i=1}^N \lambda_i \Pi^+ i - \varepsilon_{dkh} = 0,$$

где:

$\sum_{i=1}^N P_i^d C_i^d$ — расходы на приобретение продукции, произведённой отечественной экономикой;

$\sum_{i=1}^N P_i^f C_i^f$ — расходы на приобретение продукции, произведённой «Внешним миром»;
 P_i^d — цена отечественного товара i , $i = \overline{1, N}$;
 P_i^f — цена импортного товара i , $i = \overline{1, N}$;
 r_{Dep}^{dkh} — процентная ставка по депозитам домашних хозяйств;
 r_{Cr}^{dkh} — процентная ставка по кредитам домашних хозяйств;
 Cr^{dkh} — величина кредитов, выданных домашним хозяйствам на конец периода;
 Dep — величина депозитов, переданных домашними хозяйствами банкам на конец периода;
 T_{dkh} — величина уплаченных государству налогов (кроме НДС);
 W_i — размер заработной платы в отрасли i ;
 L_i — количество занятых в отрасли i ;
 Tr — величина трансфертов, полученных от государства (внебюджетные фонды);
 t_{Π} — ставка налога на прибыль;
 λ_i — доля прибыли, которую домашние хозяйства получают от реального сектора i ;
 Π^+_i — величина прибыли прибыльных предприятий сектора i , полученной в текущем периоде;
 $\Delta M0$ — изменение запаса наличных денежных средств;
 ε_{dkh} — прочие доходы домашних хозяйств (например, доходы от предпринимательской деятельности);

Также должно выполняться: $Dep = Dep_{-1} + S$; $\Delta Dep = Dep - Dep_{-1}$ — изменение величины депозитов за период; $\Delta Cr^{dkh} = Cr^{dkh} - Cr_{-1}^{dkh}$ — изменение величины кредитов за период; t_{ndfl} — ставка НДС.

После задания функций, описывающих поведение экономического агента, требуется найти функции спроса и предложения. Их поиск осуществляется путём решения оптимизационной задачи: максимизация функции полезности при бюджетном ограничении. Используем метод множителей Лагранжа. Обозначим получившуюся функцию Лагранжа — $\Phi(C_i^d, C_i^f, L_i, Dep, Cr^{dkh}, \xi) = U(C_i^d, C_i^f, L_i, Dep, Cr^{dkh}) - \xi \Psi(C_i^d, C_i^f, L_i, Dep, Cr^{dkh})$.

Потребуется решить следующую систему:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_i^d} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C_i^f} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial L_i} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Dep} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Cr^{dkh}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -\Psi = 0.$$

В результате преобразование получаем систему:

$$\begin{aligned} \alpha_{id} U^{\frac{1}{\mu}} (C_i^d)^{-\frac{1}{\mu}} &= \xi P_i^d, & \alpha_{if} U^{\frac{1}{\mu}} (C_i^f)^{-\frac{1}{\mu}} &= \xi P_i^f, \\ \alpha_{iL} U^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{1}{L_i} \right)^{-\frac{1}{\mu}} \frac{1}{L_i^2} &= \xi (1 - t_{ndfl}) W_i, & \alpha_S U^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{Dep}{P} \right)^{-\frac{1}{\mu}} \frac{1}{P} &= \xi (1 - r_{Dep}^{dkh}), \\ \alpha_{Cr} U^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{Cr^{dkh-}}{Cr^{dkh}} \right)^{-\frac{1}{\mu}} \frac{Cr^{dkh-}}{Cr^{dkh^2}} &= \xi (r_{Cr}^{dkh} (1 - l_{dkh}) - 1), & \Psi &= 0. \end{aligned}$$

Возьмем к качестве примера $N = 3$. В ходе решения этой системы получаем, что каждую функцию: $C_1^d, C_3^d, C_1^f, C_2^f, C_3^f, L_1, L_2, L_3, Cr, Dep$ — можно выразить через C_2^d . И полученные выражения подставить в условие бюджетного ограничения, таким образом, получив выражение для C_2^d , зависящее только от эндогенных параметров модели.

Полученная функция C_2^d используется для записи функции спроса на продукцию: $(C_i^d)^D, (C_i^f)^D, i = \overline{1, N}$; функции предложения труда: $L_i^S, i = \overline{1, N}$; функции спроса на кредиты и предложения депозитов: Cr^D, Dep^S .

Выведенные функциональные зависимости применяются при дальнейшем описании поведения домашних хозяйств, оценке характера взаимодействия с другими экономическими агентами рассматриваемой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарасевич Л.С., Гребенников П.И., Леусский А.И. Макроэкономика: Учебник. 6-е издание, испр. и доп. М.: Высшее образование, 2006. 654 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке ЗАО «ПРОГНОЗ».

Поступила в редакцию 10 июня 2015 г.

Simonov P.M., Shults M.N. MODELING HOUSEHOLDS IN GENERAL EQUILIBRIUM THEORY
The article discusses the use of the general equilibrium theory in constructing and analyzing a model of the household functioning.

Key words: general equilibrium theory; computable general equilibrium model; households.

Симонов Петр Михайлович, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, e-mail: simpmp@mail.ru

Simonov Pyotr Mikhailovich, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Information Systems and Mathematical Methods in Economics Department, e-mail: simpmp@mail.ru

Шульц Михаил Николаевич, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, аспирант кафедры информационных систем и математических методов в экономике, e-mail: mshults@mail.ru

Shults Mikhail Nikolaevich, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Information Systems and Mathematical Methods in Economics Department, e-mail: mshults@mail.ru

УДК 517.911.5

АППРОКСИМАЦИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ВНЕШНИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© В.В. Скоморохов

Ключевые слова: гиперболические дифференциальные включения с импульсными воздействиями; аппроксимирующее отображение; радиус внешних возмущений; модуль непрерывности отображения; δ -решение.

В работе изучаются гиперболические дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Дано определение приближенного решения (δ -решения) гиперболического дифференциального включения с импульсными воздействиями, установлены асимптотические свойства множеств решений аппроксимирующих дифференциальных включений с внешними возмущениями.