УДК 517.925.52

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

© В.К. Евченко (Каверина)

Ключевые слова: периодически возмущенная автономная система ОДУ; топологическая степень отображения; усреднение по Стеклову; коэрцитивность отображения.

Указываются достаточные условия, при которых периодически возмущенная автономная система ОДУ имеет периодическое решение.

В книге В.И. Зубова [1, с. 220] есть задача, которую можно сформулировать следующим образом: рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n), \tag{1}$$

где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ есть локально липшицево отображение, для которого $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ и $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Предположим, что нулевое стационарное решение системы (1) $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ является асимптотически устойчивым в целом, т. е. для любого решения

$$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{2}$$

Задача состоит в том, чтобы доказать или опровергнуть следующее утверждение: для того чтобы неавтономная система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + h(t) \tag{3}$$

при любой непрерывной векторной функции $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $h(t + \omega) = h(t)$ имела периодическое решение $\mathbf{x}(t + \omega) = \mathbf{x}(t)$, необходимо и достаточно, чтобы отображение f было отображением на

$$f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Мы докажем достаточность высказанных выше условий, если дополнительно к условию (4) потребуем еще выполнения условия коэрцитивности отображения f:

$$\|f(\mathbf{x})\| \to +\infty \quad \text{при} \quad \|\mathbf{x}\| \to +\infty. \tag{5}$$

Так как нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом, то по теореме Красовского-Барбашина [2, теорема 5.3, с. 37-38] существует такая непрерывно дифференцируемая функция $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что $u(\mathbf{0}) = 0$, $u(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и $u(\mathbf{x}) \to +\infty$ при $\|\mathbf{x}\| \to +\infty$; для которой

$$(grad\, u(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})) < 0, \quad (\mathbf{x} \neq 0). \tag{6}$$

В этом случае топологическая степень градиентного отображения $grad\ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ на границе любого шара S^n, содержащего нуль пространства в качестве внутренней точки

$$deg(grad\, u(\mathbf{x}), S^n) = 1 \tag{7}$$

[3, лемма 6.5, с. 111], [4, лемма 1.6.2, с. 53]. Из условий (6) вытекает, что векторные поля $grad\, u(\mathbf{x})$ и $-f(\mathbf{x})$ гомотопны на границе шара S^n и потому

$$deg(-f(\mathbf{x}), S^n) = (-1)^n. \tag{8}$$

Сделаем предположение, что любое решение $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (3) с начальным условием $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ определено при $t_0 \leqslant t < +\infty$.

Покажем, что при любой $h(t+\omega) = h(t)$ возмущенная система (3) имеет по крайней мере одно периодическое решение $\mathbf{x}(t+\omega) = \mathbf{x}(t)$. Хорошо известно, что начальное значение при $t = 0$ периодического решения с периодом ω является неподвижной точкой отображения Пуанкаре $p(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\omega, 0, \mathbf{x})$, т. е.

$$\mathbf{x} = p(\mathbf{x}). \tag{9}$$

Пусть $k = max\|h(t)\|$, $0 \leqslant t \leqslant \omega$. В силу свойства коэрцитивности (5) отображения $f(\mathbf{x})$ можно указать такое r, что

$$\|f(\mathbf{x})\| > k \quad \text{при} \quad \|\mathbf{x}\| = r. \tag{10}$$

По теореме Руше из (8) получим

$$deg(f(\mathbf{x}) + h(t), S^n) = (-1)^n, \ \ 0 \leqslant t \leqslant \omega. \tag{11}$$

Положим $q(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$, $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Если $q(\xi) = 0$ при некотором $\xi \in \partial S^n$, то возмущенная система (3) имеет ω-периодическое решение $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(t, 0, \xi)$. Пусть $q(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \partial S^n$, т. е. векторное поле $q(\mathbf{x})$ на ∂S^n является невырожденным. Центральная часть доказательства заключается в доказательстве формулы

$$deg(q(\mathbf{x}), S^n) = (-1)^n. \tag{12}$$

По теореме Кронекера [5, теорема 6.3.1, с. 162] отсюда будет следовать, что отображение $q(\mathbf{x})$ имеет нуль внутри S^n; пусть это будет точка ξ; тогда $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(t, 0, \xi)$ будет ω-периодическое решение возмущенной системы (3), и наше утверждение доказано.

При доказательстве формулы (12) мы не предполагаем, что на границе ∂S^n выполнено условие невозвращаемости $\mathbf{x}(t, 0, \xi) \neq \xi$ при $0 < t \leqslant \omega$ [6, лемма 2.2.1, с. 48-54]. Поэтому наши рассуждения меняются следующим образом.

Прежде всего для каждой точки $\xi \in \partial S^n$ найдется такое $\lambda(\xi)$, $0 \leqslant \lambda(\xi) < 1$, для которого

$$\mathbf{x}(\lambda(\xi), 0, \xi) = \xi \quad \text{и} \quad \mathbf{x}(t, 0, \xi) \neq \xi \quad \text{при} \quad \lambda(\xi) < t \leqslant 1, \tag{13}$$

(для удобства мы полагаем, что $\omega = 1$). Определим гомотопию $\varphi(\xi, \alpha) : \partial S^n \times [0, 1]$, положив

$$\begin{gathered} \varphi(\xi, 0) = \dot{\mathbf{x}}(\lambda(\xi), 0, \xi) = f(\xi) + h(\lambda(\xi)) \\ \varphi(\xi, \alpha) = \{\mathbf{x}(\alpha + (1-\alpha)\lambda(\xi), 0, \xi) - \xi\}/(\alpha(1 - \lambda(\xi))), \ \ 0 < \alpha \leqslant 1. \end{gathered} \tag{14}$$

Мы видим, что $\varphi(\xi, 0) = f(\xi) + h(\lambda(\xi))$ и $\varphi(\xi, 1) = q(\xi)$, причем $\varphi(\xi, \alpha) \neq 0$ при $\xi \in \partial S^n$ и $\alpha \in [0, 1]$. Рассматриваемая гомотопия $\varphi(\xi, \alpha)$ не является непрерывной. Можно показать, что функция $\lambda(\xi) : \partial S^n \to [0, 1]$, является измеримой, а вместе с ней измеримым по ξ является отображение $\varphi(\xi, \alpha)$ при любом $\alpha \in [0, 1]$. Кроме того, так как отображение $\varphi(\xi, \alpha)$ непрерывно по α, то гомотопия $\varphi(\xi, \alpha)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Используя усреднение по Стеклову по сфере ∂S^n, можно доказать формулу (12), исходя из формулы (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубов В.И.* Теория колебаний. М.: Высшая школа, 1979.
2. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
3. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1960.
4. *Звягин В.Г.* Введение в топологические методы анализа. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2014.
5. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1979.
6. *Перов А.И., Евченко В.К.* Метод направляющих функций. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012.

Поступила в редакцию 9 июня 2015 г.

Evchenko (Kaverina) V.K. ABOUT ONE PROBLEM FROM THE THEORY OF OSCILLATIONS
We denote sufficient conditions, under which periodically perturbed autonomous system of ODE has a periodic solution.

Key words: periodically perturbed autonomous system of ODE; topological degree of transformation; Steklov average; coercitivity of transformation.

Евченко (Каверина) Валерия Константиновна, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: lera_evk@mail.ru

Evchenko (Kaverina) Valerija Konstantinovna, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: lera_evk@mail.ru

УДК 517.922 + 517.988.5

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© Т.В. Жуковская, Е.А. Плужникова

Ключевые слова: накрывающие отображения метрических пространств; обыкновенные дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной; краевая задача; итерации.

Предлагается итерационный метод приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной решения. При выполнении условия накрывания по соответствующим переменным функций, порождающих дифференциальное уравнение и краевое условие, установлена сходимость итераций к решению краевой задачи.

Широкое применение итерационных методов для приближенного решения различных уравнений базируется, в основном, на классических принципах неподвижной точки. Результаты о накрывающих отображениях позволяют распространить итерационные методы на неявные уравнения. С использованием такого обобщенного итерационного метода А.В. Арутюновым получен принцип точки совпадения накрывающего и липшицева отображений метрических пространств [1–3]. Применение аналогичных итераций позволило доказать различные варианты теоремы о возмущениях накрывающих отображений [4, 5] и