Shmyrin A.M., Mishachev N.M., Trofimov E.P. CORRECTION OF A LINEAR NEIGHBORHOOD MODEL IN VIEW OF NEW DATA

The problem of correction of the neighborhood model coefficients in presence of new data is considered.

Key words: neighborhood model; correction.

Шмырин Анатолий Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, e-mail: amsh@lipetsk.ru

Shmyrin Anatoliy Mikhailovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Doctor of Techniques, Professor, the Head of the Higher Mathematics Department, e-mail: amsh@lipetsk.ru

Мишачёв Николай Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: sedykh-irina@yandex.ru

Mishachev Nikolay Mikhailovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: sedykh-irina@yandex.ru

Трофимов Евгений Павлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, студент, e-mail: trofimovep@list.ru

Trofimov Evgeniy Pavlovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Student, e-mail: trofimovep@list.ru

УДК 517.977

ИГРА «ЛЕВ И ЧЕЛОВЕК» НА МЕТРИЧЕСКОМ КОМПАКТЕ

© О.О. Юферева

Ключевые слова: игра преследования-убегания; Лев и Человек; компакт; геодезические; метрические пространства; стратегия простого преследования.

Рассматривается игра двух игроков «Лев и Человек» на метрическом компакте. Показывается, что ε-поимка осуществляется при следующих условиях: 1) для любых двух точек существует единственный отрезок геодезической, их соединяющий; 2) отрезки геодезических непрерывно зависят от своих концов. Используется стратегия простого преследования.

Рассмотрим игру двух игроков с одинаковыми возможностями, один из которых (преследователь) стремится поймать другого (убегающего). Игра происходит на некотором метрическом пространстве K с метрикой ρ. Первоначально такая игра называлась «Лев и Человек», и возникал «жизненно важный» вопрос, сможет ли лев поймать человека на круглой арене? Было показано, что человек может сколь угодно долго уклоняться от льва, но вместе с тем, лев может приблизиться к человеку на сколь угодно малое расстояние. По этой причине будем считать, что преследователь побеждает, если происходит ε-поимка, то есть в некоторый момент расстояние между игроками становится меньше заданного положительного числа ε.

Игра «Лев и человек» является классической, её условия варьировались в соответствии с направлениями развития игр преследования-убегания. В этой связи необходимо упомянуть Л.С. Понтрягина, Л.А. Петросяна, Н.Н. Петрова. Но несмотря на множество работ в этой области, не на все вопросы найдены ответы. Цель данной статьи — поиск условий на пространство, достаточных для победы преследователя вне зависимости от действий убегающего.

Отметим работы, в которых рассматривались похожие вопросы. В [1] изучается возможность ε-поимки в компактных CAT(0)-пространствах (пространствах Александрова неположительной кривизны). В [2] приведен пример игры, где гарантированная ε-поимка осуществляется не на компакте. Игру на пространствах, представляющих собой выпуклые поверхности, исследовали в [3, 4]; постановка такой задачи связана с проблемами робототехники. Кроме того, в [5] к игре «Лев и Человек» был сведен вопрос сцепления меры ноль броуновских процессов.

Пусть `P` и `E` обозначают игроков — преследователя и убегающего соответственно; точки $P(\cdot) \in K$ и $E(\cdot) \in K$ — положения игроков `P` и `E`.

Условия на пространство:

1. K — метрический компакт.

2. Для любой пары точек $a, b \in K$ существует единственный кратчайший путь между ними — отображение $f_{ab} : [0,1] \to K$, такое что
$$\rho\big(f_{ab}(t), a\big) = t\rho(a,b), \quad \rho\big(f_{ab}(t), b\big) = (1-t)\rho(a,b) \quad \forall t \in [0,1].$$
Будем называть его отрезком геодезической между точками $a, b \in K$.

3. Любой отрезок геодезической непрерывно зависит от своих концов, то есть
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad [\ \rho(a,c) < \delta,\ \rho(b,d) < \delta\ ] \ \Rightarrow \forall t \in [0,1] \quad [\ \rho\big(f_{ab}(t), f_{cd}(t)\big) < \varepsilon\ ].$$

Ограничения на движения: Оба игрока обладают единичными скоростями, их траектории представляют собой липшицевые кривые:
$$\rho\big(E(t_1), E(t_2)\big) \leqslant |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \geqslant 0,$$
$$\rho\big(P(t_1), P(t_2)\big) \leqslant |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \geqslant 0.$$

Описание стратегий

Пусть стратегия `P` — пошаговая модификация стратегии простого преследования, зависящая только от ε (требуемого для ε-поимки). В моменты времени Δ (через равные промежутки времени) преследователь «прицеливается» на убегающего, а в промежутке — двигается по отрезку геодезической «на цель». Каждый такой шаг `P` проходит расстояние, равное ε.

Будем говорить, что траектория системы $\big(P(\cdot), E(\cdot)\big)$ на промежутке времени $(a,b) \subset R$ *правильная*, если траектория $P(\cdot)$ преследователя реализует описанную выше стратегию при движении убегающего по трактории $E(\cdot)$.

Т е о р е м а. *Данная стратегия гарантирует преследователю ε-поимку для любых начальных положений игроков, при любых действвиях убегающего.*

Приведем **эскиз доказательства.**

Рассмотрим фазовое пространство $K^2 = K \times K$, его первая компонента — всевозможные положения игрока `P` в пространстве K, вторая — игрока `E`.

Ключевой является лемма, фактически доказанная в [1]:

Л е м м а 1. *За один шаг преследователя расстояние между игроками не меняется в том и только в том случае, если компоненты правильной траектории игроков лежат на одном (общем) отрезке геодезической; иначе расстояние уменьшается.*

Из леммы 1, очевидно:

З а м е ч а н и е. Если траектория системы правильная, расстояние между игроками не увеличивается.

В случае единственности отрезков геодезических лемму 1 можно усилить следующим образом:

Л е м м а 2. *За произвольный промежуток времени расстояние между игроками не меняется в том и только в том случае, если компоненты правильной траектории игроков лежат на одном (общем) отрезке геодезической; иначе расстояние уменьшается.*

В силу компактности:

У т в е р ж д е н и е. *Последовательность точек* $\big(P(\tau_i), E(\tau_i)\big) \in K^2, \tau_i \in \Delta$ *имеет хотя бы одну предельную точку.*

Понятно, что если предельная точка $\big(P^*, E^*\big)$ оказалась такой, что расстояние между P^* и E^* (в пространстве K) меньше или равно ε, то ε-поимка осуществится. Предположим противное:

П р е д п о л о ж е н и е 1. Существует предельная точка $\big(P^*, E^*\big)$ последовательности $\big(P(\tau_i), E(\tau_i)\big) \in K^2$ такая, что расстояние между P^* и E^* больше ε.

Л е м м а 3. *В течение одного шага преследователя игроки, находящиеся в точке* $\big(P(\tau), E(\tau)\big) \in K^2$ *в момент* $\tau \in \Delta$ *обязательно покинут* ε*-окрестность этой точки.*

Будем называть *раундом* для множества $A \subset K^2$ промежуток времени от $\tau_i \in \Delta$ до $\tau_j \in \Delta$ такой, что $\big(P(\tau_i), E(\tau_i)\big) \in A$ и $\big(P(\tau_j), E(\tau_j)\big) \in A$, и ни для каких $\tau \in (\tau_i, \tau_j) \cap \Delta$ $\big(P(\tau), E(\tau)\big)$ не принадлежит A. В силу леммы 3, для $\frac{\varepsilon}{3}$-окрестности любой точки из K^2, в которой игроки хотя бы один раз оказывались, существует хотя бы один раунд.

З а м е ч а н и е. Раундов для $\frac{\varepsilon}{3}$-окрестности предельной точки бесконечно много.

Действительно, в любой окрестности предельной точки игроки оказываются бесконечно много раз в моменты времени из Δ, но по лемме 3 — при каждом попадании в $\frac{\varepsilon}{3}$-окрестность в течение шага покидают её.

Л е м м а 4. *В* K *существует множество с диаметром меньше* ε, *для которого найдется счетное число раундов одинаковой длины.*

Из теоремы Арцела-Асколи, у последовательности траекторий $\big(P(\cdot), E(\cdot)\big)$ соответствующих раундам из леммы 4 есть предельная кривая $\zeta(\cdot)$. Для t из области определения ζ пусть $\zeta(t) = \big(\zeta_P(t),\ \zeta_E(t)\big)$.

Л е м м а 5. $\zeta(\cdot)$ обладает следующими свойствами:

1. $\zeta(\cdot)$ — правильная траектория.
2. Расстояние между концами $\zeta_P(\cdot) \in K$ меньше ε.
3. Расстояние $\rho\big(\zeta_P(t), \zeta_E(t)\big) \equiv const$.

Придем к противоречию, воспользовавшись предположением 1. Рассмотрим кривую $\zeta_P(\cdot)$ в K. Она состоит из нескольких (не менее двух) шагов преследователя, значит её длина не меньше 2ε. Из пункта 3 леммы 5 следует, что расстояние, во время движения по правильной траектории, не менялось (если представить, что игроки двигались по траектории $\zeta(\cdot)$), отсюда, по лемме 2 получаем, что $\zeta_P(\cdot)$ — отрезок геодезической в K. Это значит, что в K есть отрезок геодезической с длиной больше 2ε, соединяющий точки, расстояние между которыми меньше ε (пункт 2 леммы 5). Получили противоречие.

Поскольку предположение 1 неверно — любая предельная точка (P^*, E^*) оказывается такой, что расстояние между P^* и E^* меньше или равно ε, это означает осуществление ε-поимки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alexander S., Bishop R., Ghrist R.* Total curvature and simple pursuit on domains of curvature bounded

above // Geometriae Dedicata. 2010. V. 149. № 1. P. 275–290.
2. *Miroslav B.* Note on a compactness characterization via a pursuit game // Geometriae Dedicata. 2012. V. 160. № 1. P. 195–197.
3. *Noori N., Isler V.* Lion and Man with Visibility in Monotone Polygons // The International Journal of Robotics Research. 2013.
4. *Noori N., Isler V.* The Lion and Man Game on Convex Terrains. 2014.
5. *Bramson M., Burdzy K., Kendall W.* Shy couplings, CAT(0) spaces, and the lion and man // Ann. Probab. 2013. V. 41. № 2. P. 744–784.

Поступила в редакцию 1 июня 2015 г.

Yufereva O.O. LION AND MAN GAME ON A COMPACT METRIC SPACE
The lion and man game on a compact metric space is considered. Both players have the equal speeds. Suppose that 1) for all pairs of points there exists a unique geodesic connecting this points; 2) every geodesic continuously depends on its own endpoints. Then the strategy of simple pursuit guarantees the ε-capture. In particular, this implies the same result for CAT(0) domains.
Key words: pursuit-evader game, Lion and Man, compact set, geodesic, metric spaces, simple pursuit strategy.

Юферева Ольга Олеговна, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, студент, e-mail: yufereva12@gmail.com

Yufereva Olga Olegovna, Ural Federal University, Ekaterinburg, the Russian Federation, Student, e-mail: yufereva12@gmail.com

УДК 517.9

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА ДЛЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© Н.М. Япарова

Ключевые слова: обратная задача идентификации источника; система с распределенными параметрами; теплопроводность; преобразование Лапласа; метод регуляризации.
В статье рассмотрена одномерная обратная задача идентификации неизвестной функции источника тепла в параболическом уравнении для систем с распределенными параметрами. Предложен метод решения, основанный на использовании прямого и обратного преобразований Лапласа, позволяющий сначала свести исходную задачу к решению операторного уравнения, характеризующего явную зависимость неизвестной функции источника от известных граничных условий, а затем уже использовать регуляризующие алгоритмы для построения численного решения. Такой подход позволяет исключить неустойчивую процедуру численного обращения преобразования Лапласа из вычислительной схемы. На основании полученных результатов был разработан численный метод, проведен вычислительный эксперимент и получены экспериментальные оценки погрешностей численных решений. Результаты вычислительного эксперимента свидетельствуют о достаточной эффективности предложенного метода.

Важнейшими объектами исследования, имеющими вид систем с распределенными параметрами, являются процессы, связанные с распределением тепла внутри тела, сопровождающиеся выделением или поглощением тепла самим телом. В последнее время при разработке новых технологических процессов, связанных с рассматриваемыми системами, большое