Laneev E.B., Muratov M.N., Ponomarenko E.Yu. LINEAR INVERSE PROBLEM OF POTENTIAL IN THE ODD-PERIODIC MODELS

Obtained steady solution of the linear inverse problem of the potential for infinitely thin flat bodies in the case when the potential is set to a non-planar surface.

Key words: ill-posed problem; linear inverse problem of the potential; method of Tikhonov regularization.

Ланеев Евгений Борисович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: elaneev@yandex.ru

Laneev Evgeniy Borisovich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: elaneev@yandex.ru

Муратов Михаил Николаевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: finger@ramler.ru

Muratov Mikhail Nikolaevich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Dotsent of Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: finger@ramler.ru

Пономаренко Екатерина Юрьевна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, аспирант кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: finger@ramler.ru

Ponomarenko Ekaterina Yuryevna, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Post-graduate Student of Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: finger@ramler.ru

УДК 517.929

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© А.С. Ларионов, А.С. Толстиков

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; нелинейная краевая задача; функция Грина.

Рассматривается нелинейное функционально-дифференциальное уравнение второго порядка нейтрального типа. Приводятся достаточные условия существования решения некоторых краевых задач для этого уравнения.

Для математического описания динамических процессов с давних пор используются дифференциальные уравнения. В большинстве случаев это линейные дифференциальные уравнения или системы таких уравнений, т. к. теория линейных уравнений достаточно хорошо разработана и, к тому же, линейные уравнения часто дают первое приближение реального процесса. Впоследствии, однако, выяснилось, что существуют такие реальные объекты, для полного, адекватного описания которых линейные модели оказываются слишком грубыми или вообще невозможными. Таким образом, возникла необходимость изучения нелинейных задач для дифференциальных уравнений. Центральный вопрос в теории краевых или начальных задач для нелинейных дифференциальных уравнений – вопрос о разрешимости таких задач. Эффективным методом исследования разрешимости нелинейных краевых задач является метод, в основе которого лежит редукция исходной задачи к уравнению $x = Ax$ с монотонным оператором A, определенным на некотором частично упорядоченном множестве. Как отмечается в работах [1–3], те или иные условия монотонности входят во все утверждения о дифференциальных неравенствах, кроме классической теоремы Чаплыгина. В теории уравнения $x = Ax$ с изотонным (из $x_1 \leqslant x_2$ следует, что $Ax_1 \leqslant Ax_2$) оператором A важную роль играет теорема Тарского–Биркгофа–Канторовича [4, 5] о разрешимости этого уравнения и о существовании упорядоченной пары решений. Ниже приводятся утверждения о существовании и единственности решения краевых задач для квазилинейного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Условия разрешимости начальной задачи для систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений получены в работе [6].

Будем пользоваться обозначениями: $L_p[a,b]$ (L_p), $1 \leqslant p < \infty$ — банахово пространство функций $z : [a,b] \to R^1$, суммируемых на $[a,b]$ со степенью p; $L_\infty[a,b]$ (L_∞) — банахово пространство функций $z : [a,b] \to R^1$, измеримых и ограниченных в существенном; $C[a,b]$ (C) – банахово пространство непрерывных на $[a,b]$ функций $x : [a,b] \to R^1$; $AC_p[a,b]$ (AC_p) — банахово пространство таких абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций, что $\dot{x} \in L_p[a,b]$; $W_p^{(2)}[a,b]$ $(W_p^{(2)})$ — банахово пространство функций $x : [a,b] \to R^1$, имеющих абсолютно непрерывную производную, причем $\ddot{x} \in L_p[a,b]$.

Рассмотрим краевую задачу

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \ddot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m_1} q_i(t)\ddot{x}[g_i(t)] =$$

$$= f(t, x[h_1(t)], \ldots, x[h_{m_2}(t)]), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

$$\ddot{x}(\xi) = 0, \quad x(\xi) = 0, \text{ если } \xi < a,$$

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta, \quad \alpha, \beta \in R^1 \tag{2}$$

в предположениях: функции $q_i : [a,b] \to R^1$, $i = 1, \ldots, m_1$ измеримы и ограничены в существенном; функции g_i, $h_j : [a,b] \to R^1$ измеримы, $g_i(t) \leqslant t$, $h_j(t) \leqslant t$ почти всюду на $[a,b]$, $i = 1, \ldots, m_1$, $j = 1, \ldots, m_2$; функция $f : [a,b] \times R^{m_2} \to R^1$ удовлетворяет условиям Каратеодори.

Следуя [1], [2], обозначим

$$y_r(t) = (S_r y)(t) = \begin{cases} y[r(t)], & \text{если} \quad r(t) \in [a,b], \\ 0, & \text{если} \quad r(t) \notin [a,b]; \end{cases}$$

$$z^r(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad r(t) \in [a,b], \\ z[r(t)], & \text{если} \quad r(t) \notin [a,b]. \end{cases}$$

В этих обозначениях суперпозиция $y[r(t)]$ при условии, что $y(\xi) = z(\xi)$, если $\xi \notin [a,b]$, записывается в виде суммы $(S_r y)(t) + z^r(t)$. Пусть, далее,

$$(Sy)(t) = \sum_{i=1}^{m_1} q_i(t)(S_{g_i} y)(t),$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \ddot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m_1} q_i(t)\ddot{x}_{g_i}(t) =$$

$$= f(t, x_{h_1}(t), \ldots, x_{h_{m_2}}(t)),\ t \in [a,b]. \tag{3}$$

Решением уравнения (3) называем функцию $x \in W_p^{(2)}[a,b]$, удовлетворяющую этому уравнению при почти всех $t \in [a,b]$. Будем предполагать, что функции g_i, $i = 1, \ldots, m_1$ удовлетворяют условию $\mathcal{M}$ [2]:

$$\operatorname{mes} g_i^{-1}(e) = 0 \tag{4}$$

для любого множества $e \subset [a,b]$ нулевой меры. Здесь

$$g_i^{-1}(e) = \{t \in [a,b] : g_i(t) \in e\}$$

и, кроме того, для $1 \leqslant p < \infty$ имеет место

$$\mu_i = \left\{ \sup_{e \subset [a,b]} \frac{\operatorname{mes} g_i^{-1}(e)}{\operatorname{mes} e} \right\}^{1/p} < \infty, \quad i = 1, ..., m_1,$$

где верхняя грань берется по всем таким подмножествам e отрезка $[a,b]$, что $\operatorname{mes} e > 0$. Определенное последним равенством число μ_i является нормой оператора S_{g_i} в пространстве $L_p[a,b]$ ($1 \leqslant p < \infty$); в случае $p = \infty$ имеем $\mu_i = \|S_{g_i}\|_{L_\infty} = 1$ [2], [3].

Условие $\mathcal{M}$ обеспечивает [2], [3] непрерывное действие оператора S_{g_i} в пространстве $L_p[a,b]$ ($1 \leqslant p < \infty$). Для непрерывного действия оператора S_{g_i} в пространстве $L_\infty[a,b]$ достаточно [2], [3] выполнения условия (4).

Будем считать также, что для уравнения (3) выполнено т. н. « τ -условие» : существует такое $\tau > 0$, что либо все множества

$$\chi_i \equiv \{t \in [a,b] : t - g_i(t) \leqslant \tau, \quad g_i(t) \geqslant a\}$$

пусты, либо

$$\sum_{i=1}^{m_1} \mu_i \, vraisup_{t \in \chi_i} |q_i(t)| < 1.$$

В этом случае спектральный радиус оператора S меньше единицы [2].

При выполнении этих условий оператор $\mathcal{L}$ непрерывно действует из пространства AC_p в пространство L_p и вольтерров [2].

Для v_j, $z_j \in L_\infty$, $v_j \leqslant z_j$, $j = 1, \ldots, m_2$, обозначим:

$$[v_j, z_j] = \{x \in L_\infty : v_j \leqslant x \leqslant z_j\},$$

$$\prod_{j=1}^{m_2} [v_j, z_j] = [v_1, z_1] \times \ldots \times [v_{m_2}, z_{m_2}].$$

Будем говорить (см., напр., [1], что функция f удовлетворяет условию $\mathcal{L}^1\left(\prod_{j=1}^{m_2}[v_j, z_j]\right)$ ($\mathcal{L}^2\left(\prod_{j=1}^{m_2}[v_j, z_j]\right)$), если существуют такие функции $r_j^1(t)$ ($r_j^2(t)$), $r_j^1 \in L_p[a,b]$ ($r_j^2 \in$ $\in L_p[a,b]$), что оператор Немыцкого

$$M^1 : \prod_{j=1}^{m_2} [v_j, z_j] \to L_p[a,b] \quad (M^2 : \prod_{j=1}^{m_2} [v_j, z_j] \to L_p[a,b])$$

определяемый равенством

$$(M^1u)(t) = f(t,u(t)) + \sum_{j=1}^{m_2} r_j^1(t)u_j(t) \quad ((M^2u)(t) = f(t,u(t)) + \sum_{j=1}^{m_2} r_j^1(t)u_j(t)),$$

$$u(t) = \{u_1(t),\dots,u_{m_2}(t)\},$$

изотонен (антитонен). Без ограничения общности считаем, что $r_j^1(t) \geqslant 0$ ($r_j^2(t) \leqslant 0$), $j = 1,\dots,m_2$.

Отметим, что если функция f не убывает (не возрастает) по аргументам u_j, $j = 1,\dots,m_2$, то она удовлетворяет условию

$$\mathcal{L}^1\left(\prod_{j=1}^{m_2}[v_j,z_j]\right) \quad (\mathcal{L}^2\left(\prod_{j=1}^{m_2}[v_j,z_j]\right)),$$

причем

$$r_j^1(t) = 0 \quad (r_j^2(t) = 0), \quad j = 1,\dots,m_2.$$

Решением краевой задачи (3), (2) будем называть функцию $x \in W_p^{(2)}[a,b]$, удовлетворяющую краевым условиям (2) и почти всюду на $[a,b]$ уравнению (3).

Обозначим

$$\sigma_r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad r(t) \in [a,b], \\ 0, & \text{если} \quad r(t) \notin [a,b]. \end{cases}$$

Всюду ниже считаем, что $q_i(t)\sigma_{g_i}(t) \geqslant 0$, $i = 1,\dots,m_1$.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены условия:*

1. *существуют функции* v, $z \in W_p^{(2)}[a,b]$ *такие, что* $v \leqslant z$ *и при почти всех* $t \in [a,b]$ *справедливы неравенства*

$$(\mathcal{L}v)(t) \geqslant f(t, v_{h_1}(t)\dots,v_{h_{m_2}}(t)),$$

$$(\mathcal{L}z)(t) \leqslant f(t, z_{h_1}(t)\dots,z_{h_{m_2}}(t)),$$

$$v(a) \leqslant \alpha \leqslant z(a), \quad v(b) \leqslant \beta \leqslant z(b);$$

2. *функция* f *не возрастает по аргументам* u_j, $j = 1,\dots,m_2$.

   Тогда краевая задача (3), (2) имеет решение x, *удовлетворяющее неравенствам* $v \leqslant x \leqslant z$.

   Если, кроме того,

3. *функция* f *удовлетворяет условию* $\mathcal{L}^1\left(\prod_{j=1}^{m_2}[v_{h_j}z_{h_j}]\right)$;

4. *коэффициенты* $r_j^1(t)$, $j = 1,\dots,m_2$ *этого условия таковы, что краевая задача*

$$(\mathcal{L}_1x)(t) \equiv (\mathcal{L}x)(t) + \sum_{j=1}^{m_2} r_j^1(t)x_{h_j}(t) = \eta_1(t), \quad t \in [a,b],$$

$$x(a) = 0, \quad x(b) = 0$$

   однозначно разрешима, и ее функция Грина неположительна в квадрате $[a,b]\times[a,b]$, *то это решение* x *единственно в порядковом интервале* $[v,z]$.

Схема доказательства. При выполнении условия 2 теоремы 1 краевая задача (3), (2) эквивалентна уравнению $x = Ax$, где оператор $A : [\nu, z] \to C$ определен равенством

$$(Ax)(t) = \int_a^b G_2(t,s) f(s, x_{h_1}(s), \ldots, x_{h_{m_2}}(s))\, ds + \zeta_2(t).$$

Здесь $\zeta_2(t)$ — решение полуоднородной задачи $\mathcal{L}x = 0$, $x(a) = \alpha$, $x(b) = \beta$, а $G_2(t,s)$ — функция Грина задачи

$$\mathcal{L}x = \eta_2, \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0.$$

Оператор A изотонен и вполне непрерывен. Из неравенств

$$(\mathcal{L}v)(t) \geqslant f(t, v_{h_1}(t), \ldots, v_{h_{m_2}}(t)), \quad v(a) \leqslant \alpha, \quad v(b) \leqslant \beta$$

следует, что $v \leqslant Av$. Неравенство $z \geqslant Az$ получается аналогично. Таким образом, вполне непрерывный оператор A отображает множество $[v, z]$ в себя, следовательно, оператор A имеет неподвижную точку, принадлежащую $[v, z]$. Существование решения краевой задачи (3), (2) в порядковом интервале $[v, z]$ доказано. Доказательство единственности решения основано на редукции задачи (3), (2) к уравнению с антитонным оператоом.

Рассмотрим для уравнения (3) краевую задачу с условиями

$$x(b) = \alpha, \; \dot{x}(b) = \beta \tag{5}$$

в тех же предположениях относительно урвнения (3), что и выше.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия:*

1. *существуют функции* v, $z \in W_p^{(2)}[a,b]$ *такие, что* $v \leqslant z$ *и при почти всех* $t \in [a,b]$ *справедливы неравенства*

$$(\mathcal{L}v)(t) \leqslant f(t, v_{h_1}(t) \ldots, v_{h_{m_2}}(t)),$$

$$(\mathcal{L}z)(t) \geqslant f(t, z_{h_1}(t) \ldots, z_{h_{m_2}}(t)),$$

$$v(b) \leqslant \alpha \leqslant z(b), \quad \dot{v}(b) \leqslant \beta \leqslant \dot{z}(b);$$

2. *функция* f *не убывает по аргументам* u_j, $j = 1, \ldots, m_2$.

   Тогда краевая задача (3), (5) имеет решение x, *удовлетворяющее неравенствам* $v \leqslant x \leqslant z$.

   Если, кроме того,

3. *функция* f *удовлетворяет условию* $\mathcal{L}^2\left(\prod\limits_{j=1}^{m_2} [v_{h_j} z_{h_j}]\right)$;

4. *коэффициенты* $r_j^2(t)$, $j = 1, \ldots, m_2$ *этого условия таковы, что краевая задача*

$$(\mathcal{L}_2 x)(t) \equiv (\mathcal{L}x)(t) + \sum_{j=1}^{m_2} r_j^2(t) x_{h_j}(t) = \eta_2(t), \quad t \in [a,b],$$

$$x(b) = 0, \quad \dot{x}(b) = 0$$

однозначно разрешима, и ее функция Грина неотрицательна в квадрате $[a,b] \times [a,b]$, *то это решение* x *единственно в порядковом интервале* $[v, z]$.

Доказательство теоремы 2 проводится по тем же схемам, что и доказательство теоремы 1.

З а м е ч а н и е. Редукция нелинейной краевой задачи к уравнению с монотонным оператором становится возможной, если сохраняет знак функция Грина соответствующей линейной краевой задачи. Эффективные признаки знакопостоянства функции Грина некоторых краевых задач приведены в работах [7, 8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф.* К вопросу о функционально-дифференциальных неравенствах и монотонных операторах // Функц.-дифференц. уравнения. Пермь: Изд-во Перм. политех. ин-та, 1986. С. 3–9.

2. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

3. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.

4. *Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1950.

5. *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.

6. *Ларионов А.С., Симонов П.М., Шеина М.В.* Условия разрешимости начальной задачи для систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 2. С. 542-549.

7. *Домошницкий А.И.* О справедливости теоремы Чаплыгина для уравнений нейтрального типа // Краевые задачи. Перм. политехн. ин-т. Пермь. 1981. С. 121-125.

8. *Ларионов А.С.* Признаки сохранения знака функции Грина некоторых краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом // Вестник гражданских инженеров. 2008. № 1(14). С. 85-89.

Поступила в редакцию 17 июня 2015 г.

Larionov A.S., Tolstikov A.S. SOLVABILITY OF NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A NONLINEAR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER

A nonlinear functional-differential equation of the second order of neutral type is considered in this article. The sufficient conditions of existence of solution of some boundary value problems for this equation are presented.

Key words: functional-differential equation; nonlinear boundary value problem; Green function.

Ларионов Александр Степанович, Братский государственный университет, г. Братск, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики, e-mail: larios84@yandex.ru

Larionov Aleksandr Stepanovich, Bratsk State University, Bratsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematics Department, e-mail: larios84@yandex.ru

Толстиков Александр Степанович, Братский государственный университет, г. Братск, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры информатики и прикладной математики, e-mail: tolstikov_a@rambler.ru

Tolstikov Aleksandr Stepanovich, Bratsk State University, Bratsk, the Russian Federation, Candidate of Technics, Associate Professor of the Department of Informatics and Applied Mathematics, e-mail: tolstikov_a@rambler.ru