

Симонов Петр Михайлович, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, e-mail: simpmm@mail.ru

Simonov Pyotr Mikhailovich, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Information Systems and Mathematical Methods in Economics Department, e-mail: simpmm@mail.ru

УДК 517.977.1

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕГОЛОНОМНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ СНЕЙКБОРДА

© Т.Н. Астахова

Ключевые слова: дискретно-переключаемая функция управления; метод возврата; неголономная система; снейкборд; управляемость.

Рассмотрена задача конструктивной проверки локальной управляемости для неголономной системы, описывающей движение снейкборда, с использованием дискретно-переключаемых функций управления.

Исследование задачи управления для класса неголономных систем является проблемой первостепенной важности, особенно в связи со стремительным развитием робототехники. Механические системы при моделировании движения различных колесных мобильного роботов и роботов-манипуляторов описываются в общем случае нелинейными неголономными системами управления [1]. В большинстве случаев существующие необходимые, а также достаточные условия управляемости для неголономных систем описываются в терминах свойств соответствующих алгебр Ли, что не позволяет конструктивно проверить управляемость нелинейной системы, т. к. не существует эффективной оценки числа итерированных скобок Ли при проверке соответствующего рангового условия. В данной работе использован иной метод исследования управляемости неголономных систем — метод возврата [2].

Пусть задана система управления

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

где x — фазовый вектор, u — управление; точка обозначает производную по времени t . Будем предполагать, что D — область, $0 \in D$, U — замкнутая область, $f \in C^1(D \times U)$.

Будем использовать следующее определение управляемости:

О п р е д е л е н и е. Система (1) называется *управляемой*, если для любых точек $x^{(0)}, x^{(1)} \in D$ найдутся $\tau > 0$, $u \in L_\infty([0, \tau] \rightarrow U)$, при которых система (1) имеет решение $x(t)$, $t \in [0, \tau]$, удовлетворяющее граничным условиям $x(0) = x^{(0)}$, $x(\tau) = x^{(1)}$.

Если в определении возможно выбрать управление для любых $x^{(0)}, x^{(1)}$ из некоторой ε -окрестности точки $x = 0$, то система (1) называется *локально управляемой* в точке $x = 0$.

Напомним теорему, предложенную в работе [3], необходимую для дальнейшего исследования:

Т е о р е м а 1. Для фиксированного $\tau > 0$ рассмотрим семейство управлений $u(t, a) \in U$, $0 \leq t \leq \tau$, зависящих от параметра $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$. Предположим, что при каждом $a \in \mathbb{R}^k$ существует единственное $x(t, a)$ решение задачи Коши:

$$\dot{x}(t, a) = f(x(t, a), u(t, a)), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, t \in [0, \tau]; \quad (2)$$

$$x(0, a) = 0. \quad (3)$$

Пусть существует $a = a^*$, где $a^* \in \mathbb{R}^k$, при котором соответствующее решение $x(t, a^*)$ удовлетворяет условию

$$x(\tau, a^*) = 0.$$

Тогда, если

$$\text{rank} \left(\frac{\partial x(\tau, a)}{\partial a} \right) \bigg|_{a=a^*} = n, \quad (4)$$

то система (1) локально управляема в окрестности точки $x = 0$.

Снейкборд является некоторой модификацией известных роликовой (скейтборд) и снежной досок (сноуборд). Как и у скейтборда в снейкборде имеются колеса и подвески, однако, принцип движения заимствован у сноуборда. Снейкборд движется зигзагами, потому как доска состоит из трех независимых частей. Детальное описание строения и механизм движения изложены в работе А.С. Кулешова [4].

Рассмотрим систему управления

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \theta, \\ \dot{y} = V \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \frac{V \sin \varphi}{l \cos \varphi}, \quad V, \varphi \in [-1, +1]. \end{cases} \quad (5)$$

где x, y — координаты центра масс системы, V — скорость центра масс снейкборда, l — расстояние от центра масс системы до точек крепления осей колес, φ — угол поворота платформ, θ — угол между продольной осью снейкборда и осью Ox (см. рис. 1).

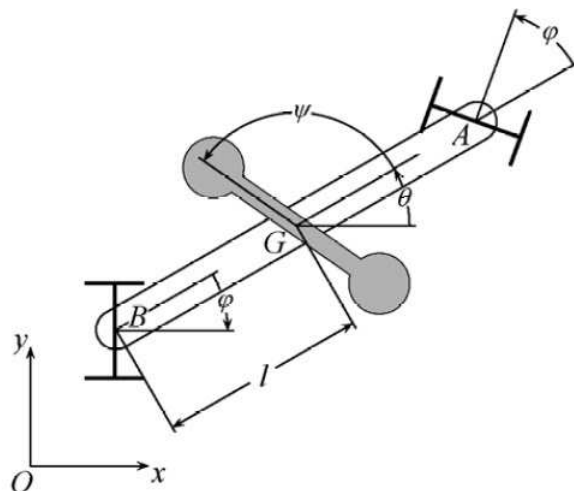


Рис. 1: Модель снейкборда

Система (5) является моделью движения снейкборда в случае управления углом поворота φ и скоростью центра масс V .

Для $k \geq 1, j = 2, 3, \dots, k$ и вектора $a = (a_1, \dots, a_k)$, $a_j \geq 0$, обозначим через S_j полуинтервал вида $S_j = \left[\sum_{i=1}^{j-1} a_i, \sum_{i=1}^j a_i \right)$, в случае $j = 1$ положим $S_1 = [0, a_1)$.

Определим функцию управления $u(t, a)$ следующим образом:

$$u(t, a) = \begin{cases} +1, & \text{если } t \in \bigcup_{r=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} S_{2r-1}; \\ -1, & \text{если } t \in \bigcup_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} S_{2r}; \\ 0, & \text{если } t \geq a_1 + a_2 + \dots + a_k. \end{cases} \quad (6)$$

Положим $k = 3$ и рассмотрим управление $V = V(t, a)$, $\varphi = \varphi(t, a)$ вида (6), получим, что данная система (5) локально управляема в окрестности $x = 0$ по Теореме 1 при следующих заданных параметрах:

$$\begin{cases} a_1 = a_1, \\ a_2 = 4.03nl, \\ a_3 = -a_1 + 4.03nl. \end{cases}$$

где $n, l \in \mathbb{Z}$, $0 < a_1 < 4.03nl$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Laumond J.P.* Robot Motion Planning and Control // Lecture Notes in Control and Information Sciences. 1998. № 229. P. 343.
2. *Coron J.-M.* Return method: some applications to flow control // Mathematical control theory. Trieste: The Abdus Salam ICTP. 2002. P. 655–704.
3. *Зуев А.Л., Чумаченко Т.Н.* Исследование локальной управляемости нелинейных систем методом возврата // Механика твердого тела. 2008. Вып. 38. С. 136–144.
4. *Кулешов А.С.* Математическая модель снейкборда // Математическое моделирование. 2006. Т. 18. № 5. С. 37–48.

Поступила в редакцию 11 июня 2015 г.

Astakhova T.N. INVESTIGATION OF LOCAL CONTROLLABILITY OF NONHOLONOMIC CONTROL SYSTEM DESCRIBING THE SNAKEBOARD MOTION

The constructive test problem of local controllability of nonholonomic system describing the snakeboard motion by using sampled control function is considered.

Key words: sampled control function; return method; nonholonomic system; snakeboard; controllability.

Астахова Татьяна Николаевна, Нижегородский государственный инженерно-экономический университет, г. Княгинино, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий, e-mail: ctn_af@mail.ru

Astakhova Tatyana Nikolaevna, Nizhny Novgorod State Engineering and Economic University, Knyaginino, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Information Systems and Technology Department, e-mail: ctn_af@mail.ru