Key words: physical deterioration of residential buildings; deterioration signs; quantitative estimation.

Плотников Константин Михайлович, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, аспирант кафедры информационных систем и математических методов в экономике, e-mail: kzenord@gmail.com

Plotnikov Konstantin Mihkailovich, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Information Systems and Mathematical Methods in Economics Department, e-mail: kzenord@gmail.com

Симонов Петр Михайлович, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, e-mail: simpm@mail.ru

Simonov Pyotr Mihkailovich, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Information Systems and Mathematical Methods in Economics Department, e-mail: simpm@mail.ru

УДК 517.977

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ

© **Н. И. Погодаев**

Ключевые слова: уравнение неразрывности; оптимальное управление; необходимые условия оптимальности.

В докладе рассматривается задача управления для уравнения неразрывности. Цель управляющего агента — собрать максимальное количество вещества в некотором целевом множестве к заданному моменту времени. Затрагиваются вопросы существования оптимальных управлений и приводится необходимое условие оптимальности.

Пусть пространство $\mathbb{R}^n$ заполнено веществом, распределение которого характеризуется функцией плотности $\rho = \rho(t,x)$. Все частицы вещества движутся вдоль управляемого векторного поля $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t,x,u)$, где управляющий параметр u выбирается в каждый момент времени t из компактного множества $U \subset \mathbb{R}^m$. В целом такое движение описывается законом сохранения массы

$$\rho_t + div\Big(\mathbf{v}\big(t,x,u(t)\big)\rho\Big) = 0 \tag{1}$$

с начальным условием

$$\rho(0,x) = \rho_0(x). \tag{2}$$

Поставим следующую задачу: необходимо выбрать управляющую стратегию $u = u(t)$ так, чтобы собрать как можно больше вещества в целевом множестве A к моменту времени T. Другими словами, из множества допустимых управлений

$$\mathcal{U} = \{u(\cdot) \text{ измеримо, } u(t) \in U \text{ для всех } t \in [0,T]\}$$

необходимо выбрать то, которое максимизирует функционал

$$\int\limits_A \rho(T,x)\,dx. \tag{3}$$

Всюду в дальнейшем считаем, что функция $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t,x,u)$ непрерывна по совокупности переменных и дважды непрерывно дифференцируема по x; кроме того, существуют такие константы L и C, что для всех $t \in [0,T]$, $u \in U$ и $x, x' \in \mathbb{R}^n$ имеют место неравенства

$$\left|\mathbf{v}(t,x,u) - \mathbf{v}(t,x',u)\right| \leqslant L|x-x'| \quad \text{и} \quad \left|\mathbf{v}(t,x,u)\right| \leqslant C\,(1+|x|)\,.$$

Первый вопрос, на который необходимо ответить: существует ли управление, максимизирующее функционал (3)? Оказывается, что при некоторых дополнительных предположениях о функции $\mathbf{v}$ это так.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\mathbf{v}$ *записывается в виде*

$$\mathbf{v}(t,x,u) = \mathbf{v}_0(t,x) + \sum_{i=1}^{l} \phi_i(t,u)\mathbf{v}_i(t,x),$$

где ϕ_i *— числовые функции, причём для каждого* t *множество*

$$\Phi(t,U) = \begin{pmatrix} \phi_1(t,U) \\ \cdots \\ \phi_l(t,U) \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^l$$

выпукло. Если A *замкнуто и* $\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *то в задаче* (1)–(3) *существует хотя бы одно оптимальное управление.*

Следующая теорема характеризует оптимальные управления. Чтобы сформулировать её, нам понадобятся понятия фазового потока и шаровой окрестности.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть для каждой точки (t,x) задача Коши

$$\begin{cases} \dot{y} = \mathbf{w}\big(s, y(s)\big), \\ y(t) = x. \end{cases}$$

имеет единственное решение $y(\cdot,t,x)$, определённое на всём отрезке $[0,T]$. Отображение $(t,s,x) \mapsto \Phi_t^s(x)$, заданное равенством

$$\Phi_t^s(x) = y(s,t,x),$$

называется *фазовым потоком неавтономного векторного поля* $\mathbf{w}$.

О п р е д е л е н и е 2. Замкнутое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ назовём *шаровой окрестностью*, если оно является объединением некоторого семейства замкнутых шаров одинакового (ненулевого) радиуса.

Т е о р е м а 2. *Пусть* A *— компактная шаровая окрестность,* $\rho_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$, u *— оптимальное управление в задаче* (1)–(3), ρ *— соответствующее ему решение уравнения неразрывности. Тогда для почти всех* $\tau \in [0,T]$ *имеет место равенство*

$$\int_{\partial A^\tau} \rho(\tau,x)\,\mathbf{v}\big(\tau,x,u(\tau)\big) \cdot \mathbf{n}_{A^\tau}(x)\,d\sigma(x) = \min_{\omega\in U} \int_{\partial A^\tau} \rho(\tau,x)\,\mathbf{v}(\tau,x,\omega) \cdot \mathbf{n}_{A^\tau}(x)\,d\sigma(x).$$

Здесь $A^\tau = \Phi_T^\tau(A)$, *где* Φ *— фазовый поток векторного поля* $(t,x) \mapsto \mathbf{v}\big(t,x,u(t)\big)$, $\mathbf{n}_{A^\tau}(x)$ *— внешняя единичная нормаль (в смысле теории меры) к множеству* A^τ *в точке* x, σ *—* $(n-1)$*-мерная Хаусдорфова мера.*

Если ∂A — $(n-1)$-мерное гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^n$, то каждое множество ∂A^τ также будет $(n-1)$-мерным гладким подмногообразием. В этом случае $n_{A^\tau}(x)$ совпадает с обычной единичной внешней нормалью к множеству A^τ в точке x, а σ — с обычной $(n-1)$-мерной формой объёма.

Отметим, что необходимое условие оптимальности имеет следующую наглядную интерпретацию. Пусть управление $u = u(t)$ оптимально. Сдвинем целевое множество A вдоль векторного поля $(t, x) \mapsto \mathbf{v}\big(t, x, u(t)\big)$ в обратном времени. Обозначим образ множества A в момент времени τ через A^τ. Тогда для почти каждого τ управляющий параметр $u(\tau)$ должен быть выбран так, чтобы минимизировать поток вещества, вытекающего из области A^τ.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа частично поддержана РФФИ (грант № 14-01-31254).

Поступила в редакцию 10 июня 2015 г.

Pogodaev N.I. AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE CONTINUITY EQUATION

In the talk we consider an optimal control problem for the continuity equation. The controller's aim is to maximize the total mass within a target set by a given time moment. We prove the existence of optimal controls and present a necessary optimality condition.

Key words: continuity equation; optimal control; necessary optimality conditions.

Погодаев Николай Ильич, Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории Математических методов анализа свойств динамических систем, e-mail: n.pogodaev@icc.ru

Pogodaev Nikolay Ilich, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher of the Mathematical Methods of Analysis of Properties in Dynamical Systems Laboratory, e-mail: n.pogodaev@icc.ru

УДК 517.977.56

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ

© С.Л. Подвальный, В.В. Провоторов

Ключевые слова: дифференциальная система с распределенными параметрами на графе; обобщенные решения; граничное управление; граничное наблюдение.

Для дифференциальной системы, состояние которой описывается параболической начально-краевой задачей с распределенными параметрами на графе, рассматривается задача граничного управления в классе обобщенных решений. При этом управление и наблюдение одновременно являются граничными, получены условия существования единственного управления и соотношения, характеризующие управления.

Настоящая работа продолжает исследования, результаты которых приведены в [1–4]: использован подход, основанный на априорных оценках обобщенных решений начально-краевой задачи для уравнений параболического типа с распределенными параметрами на графе. На этой базе рассмотрена задача, когда управление и наблюдение одновременно являются граничными, получены условия существования единственного управления и соотношения, характеризующие управления. Все рассмотрения используют произвольный связный ограниченный ориентированный граф, допускающий наличие циклов.