УДК 517.977 + 517.925.51

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УСТОЙЧИВОЙ СВОБОДНОЙ ДИНАМИКОЙ

© **В.А. Зайцев**

Ключевые слова: билинейные системы; периодические системы; глобальная асимптотическая стабилизация; обратная связь.

Получены новые достаточные условия равномерной глобальной асимптотической стабилизации нулевого решения билинейной неоднородной периодической системы с устойчивой свободной динамикой, замкнутой обратной связью по состоянию.

В работе продолжаются исследования, проведенные в [1–5]. Рассмотрим билинейную управляемую систему с периодическими коэффициентами

$$\dot{x} = A(t)x + \big(B(t,x) + G(t)\big)u. \tag{1}$$

Здесь $t \in \mathcal{I} = (\zeta, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$. Предполагаем, что $B(t,x) = [B_1(t)x, \ldots, B_r(t)x] \in$ $\in M_{n,r}$, $A, B_k \in C^\alpha(\mathcal{I}, M_n)$, $G(t) = [G_1(t), \ldots, G_r(t)] \in M_{n,r}$, $G_k \in C^\alpha(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n)$, $\alpha \geqslant 0$, $A(t+\omega) \equiv A(t)$, $B_k(t+\omega) \equiv B_k(t)$, $G(t+\omega) \equiv G(t)$, $t \in \mathcal{I}$, $k = \overline{1,r}$, $\omega > 0$; здесь $M_{n,r}$ — пространство вещественных $n \times r$-матриц, $M_n := M_{n,n}$. Обозначим через $X(t,s)$ матрицу Коши свободной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Для произвольной матрицы $P(t) \in M_n$ определим операторы $W_A P(t)$ и $S_A P(t)$ равенствами $W_A P(t) := A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \dot{P}(t)$, $\quad S_A P(t) := P(t)A(t) - A(t)P(t) + \dot{P}(t)$. Полагаем по определению $W_A^0 P := P$, $W_A^i P := W_A(W_A^{i-1}P)$, $S_A^0 P := P$, $S_A^i P := S_A(S_A^{i-1}P)$, $i \in$ $\in \mathbb{N}$. Для произвольной матрицы $P(t) \in M_{n,m}$, $m \geqslant 1$, определим операторы $N_A P(t)$ и $K_A P(t)$ равенствами $N_A P(t) := \dot{P}(t) + A^T(t)P(t)$, $\quad K_A P(t) := \dot{P}(t) - A(t)P(t)$. Полагаем по определению $N_A^0 P := P$, $N_A^i P := N_A(N_A^{i-1}P)$, $K_A^0 P := P$, $K_A^i P := K_A(K_A^{i-1}P)$, $i \in \mathbb{N}$.

Пусть существует матрица $Q \in C^\varkappa(\mathcal{I}, M_n)$, $\varkappa \geqslant 1$, такая, что выполнены условия

$$Q(t+\omega) = Q(t), \qquad Q(t) = Q^T(t) > 0, \qquad W_A Q(t) \leqslant 0, \qquad t \in \mathcal{I}. \tag{3}$$

Положим $\mu = \min\{\alpha + 1, \varkappa\}$, $\quad \rho = \min\{\alpha, \varkappa\}$, $\quad \sigma = \alpha$, $\quad 0 \leqslant \nu \leqslant \alpha$, $\quad \phi(\nu) = \min\{\alpha - \nu, \varkappa\}$. Выпишем следующие тождества

$$x_0^T X^T(t,t_0)(W_A Q)(t)X(t,t_0)x_0 \equiv 0, \quad t \geqslant t_0, \tag{4}$$

$$x_0^T X^T(t,t_0)(W_A^j Q)(t)X(t,t_0)x_0 \equiv 0, \quad t \geqslant t_0, \quad j = \overline{1,\mu}, \tag{5}$$

$$x_0^T X^T(t,t_0)Q(t)B_k(t)X(t,t_0)x_0 + x_0^T X^T(t,t_0)Q(t)G_k(t) \equiv 0, \quad t \geqslant t_0, \quad k = \overline{1,r}, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} x_0^T X^T(t,t_0)W_A^j\big(Q(t)B_k(t)\big)X(t,t_0)x_0 + x_0^T X^T(t,t_0)N_A^j\big(Q(t)G_k(t)\big) \equiv 0, \\ t \geqslant t_0, \quad k = \overline{1,r}, \quad j = \overline{0,\rho}, \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} x_0^T X^T(t,t_0)Q(t)(S_A^i B_k)(t)X(t,t_0)x_0 + x_0^T X^T(t,t_0)Q(t)(K_A^i G_k)(t) \equiv 0, \\ t \geqslant t_0, \quad k = \overline{1,r}, \quad i = \overline{0,\alpha}, \end{gathered} \tag{8}$$

$$x_0^T X^T(t,t_0) W_A^j\Big(Q(t)(S_A^i B_k)(t)\Big) X(t,t_0)x_0 + x_0^T X^T(t,t_0) N_A^j\Big(Q(t)(K_A^i G_k)(t)\Big) \equiv 0,$$
$$t \geqslant t_0, \quad k=\overline{1,r}, \quad i=\overline{0,\nu}, \quad j=\overline{0,\phi(\nu)}, \quad \nu=\overline{0,\alpha}. \tag{9}$$

Построим управление в системе (1) в виде

$$\widehat{u}(t,x) = -2\big(B(t)x + G(t)\big)^T Q(t)x\,. \tag{10}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть существует матрица* $Q \in C^{\varkappa}(\mathcal{I}, M_n)$, $\varkappa \geqslant 1$, *удовлетворяющая условиям* (3), *такая, что для некоторого* $t_0 \in \mathcal{I}$ *выполнено любое из следующих условий:*

(A) *тождества* (4), (6) *выполнены, только если* $x_0 = 0$;

(B) *тождества* (5), (7) *выполнены, только если* $x_0 = 0$;

(C) *тождества* (5), (8) *выполнены, только если* $x_0 = 0$;

(D) *тождества* (4), (8) *выполнены, только если* $x_0 = 0$;

(E) *тождества* (5), (9) *выполнены, только если* $x_0 = 0$.

Тогда управление (10) *равномерно глобально асимптотически стабилизирует нулевое решение системы* (1).

Для однородной периодической системы (1) с матрицей $G(t) = 0$ аналогичные утверждения были получены при некоторых дополнительных предположениях в [1, теорема 6] (с $A(t) \equiv A$), [2, теорема 9], [3, теоремы 2, 3], [4, теоремы 5, 6], [5, теоремы 8, 9]. Теорема 1 обобщает и уточняет результаты в [1–5].

Далее, построим подпространства

$$\widetilde{\Delta}(t,x) = \operatorname{span}\{A(t)x, (S_A^i B_k)(t)x + (K_A^i G_k)(t),\ k=\overline{1,r},\ i=\overline{0,\alpha}\},$$
$$\widetilde{\Gamma}(t,x) = \operatorname{span}\{(S_A^i B_k)(t)x + (K_A^i G_k)(t),\ k=\overline{1,r},\ i=\overline{0,\alpha}\}.$$

Т е о р е м а 2. 1. *Пусть существует матрица* $Q \in C^{\varkappa}(\mathcal{I}, M_n)$, $\varkappa \geqslant 1$, *удовлетворяющая условиям* (3), *и выполнено следующее условие:*

(F) $\exists\, s \in \mathcal{I} \quad \forall\, x \neq 0 \quad \dim \widetilde{\Gamma}(s,x) = n.$

Тогда управление (10) *равномерно глобально асимптотически стабилизирует нулевое решение системы* (1).

2. *Пусть существует стационарная матрица* $Q \in M_n$, *удовлетворяющая условиям* (3), *и выполнено следующее условие:*

(G) $\exists\, s \in \mathcal{I} \quad \forall\, x \neq 0 \quad \dim \widetilde{\Delta}(s,x) = n.$

Тогда управление (10) *равномерно глобально асимптотически стабилизирует нулевое решение системы* (1).

З а м е ч а н и е 1. Матрица $Q(t) \equiv Q$, удовлетворяющая условиям (3), существует, к примеру, тогда, когда матрица $A(t)$ кососимметрическая или постоянная. В первом случае можно взять $Q = I$, во втором — матрицу Q можно построить по лемме 2 [1].

Далее, для периодических систем имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 3. *Следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Система* (2) *устойчива.*

(2) *Существует матрица* $Q \in C^{\varkappa}(\mathcal{I}, M_n)$, $\varkappa = \alpha + 1$, *удовлетворяющая условиям* (3).

Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) — это теорема Ляпунова. Доказательство импликации (1) $\Rightarrow$ (2) приводится, например, в [3, теорема 6]. Матрица $Q(t)$ находится конструктивно по матрице Коши системы (2). Таким образом, из теорем 1, 2, 3 вытекают следствия. Построим числа

$$\mu = \alpha + 1, \quad \rho = \alpha, \quad \phi(\nu) = \alpha - \nu. \tag{11}$$

С л е д с т в и е 1. *Пусть система* (2) *устойчива, выполнены равенства* (11), *и для некоторого* $t_0 \in \mathcal{I}$ *выполнено какое-либо из условий от* (A) *до* (E), *где матрица* $Q(t)$

построена по теореме 3. *Тогда управление* (10) *равномерно глобально асимптотически стабилизирует нулевое решение системы* (1).

Следствие 1 вытекает из теорем 1 и 3.

С л е д с т в и е 2. *Пусть система* (2) *устойчива, и выполнено условие* (F). *Тогда управление* (10) *равномерно глобально асимптотически стабилизирует нулевое решение системы* (1); *здесь* $Q(t)$ — *некоторая матрица, удовлетворяющая условиям* (3).

Следствие 2 вытекает из теорем 2 и 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зайцев В.А.* Обобщение теоремы Джарджевича–Куинна и стабилизация билинейных управляемых систем с периодическими коэффициентами. I // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 1. С. 101–110.

2. *Зайцев В.А.* Обобщение теоремы Джарджевича–Куинна и стабилизация билинейных управляемых систем с периодическими коэффициентами. II // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 3. С. 348–357.

3. *Zaitsev V.A.* Global asymptotic stabilization of bilinear control systems with periodic coefficients // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 2. С. 17–27.

4. *Зайцев В.А.* Стабилизация аффинных управляемых систем с периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 12. С. 1664–1672.

5. *Zaitsev V.A.* Global asymptotic stabilization of affine periodic systems by damping control // IFAC Papers Online. 5th IFAC International Workshop on Periodic Control Systems. 2013. Vol. 5. Part 1. P. 166–170.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части.

Поступила в редакцию 5 мая 2015 г.

Zaitsev V.A. SUFFICIENT CONDITIONS FOR UNIFORM GLOBAL ASYMPTOTIC STABILIZATION OF BILINEAR NONHOMOGENEOUS PERIODIC SYSTEMS WITH STABLE FREE DYNAMICS

We obtain new sufficient conditions for uniform global asymptotic stabilization of the zero equilibrium by state feedback for a bilinear nonhomogeneous periodic system with stable free dynamics.

Key words: bilinear systems; periodic systems; global asymptotic stabilization; feedback control.

Зайцев Василий Александрович, Удмуртский государственный университет, г. Ижевск, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: verba@udm.ru

Zaitsev Vasilii Aleksandrovich, Udmurt State University, Izhevsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Differential Equations Department, e-mail: verba@udm.ru