Key words: covering mappings of metric spaces; the Nemytskiy operator in spaces of integrable functions.

Алвеш Мануэль Жуаким, Университет Эдуардо Мондлане, г. Мапуту, Мозамбик, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: mjalves@tvcabo.co.mz

Alves Manuel Juaquim, Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, e-mail: mjalves@tvcabo.co.mz

Плужникова Елена Александровна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Pluzhnikova Elena Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Algebra and Geometry Department, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Трещёв Валентин Сергеевич, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: treshchev.math@mail.ru

Treshchev Valentin Sergeyevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Algebra and Geometry Department, e-mail: treshchev.math@mail.ru

УДК 517.977

ВЫРОЖДЕННАЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© И.Ю. Андреева, А.Н. Сесекин

Ключевые слова: вырожденная линейно-квадратичная задача; линейное запаздывание.
Рассматривается вырожденная линейно-квадратичная задача оптимизации на траекториях линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений с линейным запаздыванием. При определенных предположениях решение данной задачи существует в классе импульсных управлений. Построено оптимальное программное управление, решающее эту задачу, которое содержит импульсные составляющие в начальный и конечный моменты времени, внутри промежутка управления управление является гладкой функцией.

Введение. Рассматриваемая задача принадлежит к классу вырожденных линейно-квадратичных задач оптимизации. Такие задачи имеют важное прикладное значение [1]. Для вырожденных линейно-квадратичных задач характерно то, что в классе измеримых управлений такие задачи решения не имеют [2-4]. В такой ситуации для обеспечения существования оптимального управления приходится расширять множество допустимых управлений, допуская импульсные управления. В работе рассматривается вырожденная линейно-квадратичная задача для системы с линейным запаздыванием. Такие системы встречаются при описании движения токоприемника у транспортных средств с электрической тягой, в биологии, вейвлет-теории и др. Аналогичная задача для случая постоянной матрицы B рассматривалась в [5]. Помимо того, что в настоящей работе рассматривается случай переменной матрицы B, результаты получены не сведением исходной задачи с переменным запаздыванием с помощью замены времени к задаче с постоянным запаздыванием (см. [6]), а построением некоторой вспомогательной регулярной задачи с линейным запаздыванием с последующим применение к ней метода динамического программирования.

Постановка задачи. Рассмотрим линейную управляемую систему с линейным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_\mu(t)x(\mu t) + \int_\mu^1 G(t,s)x(st)\,ds + B(t)\dot{v}(t) \tag{1}$$

и с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \qquad t \in [\mu t_0, t_0].$$

Здесь $A(t)$, $A_\mu(t)$, $B(t)$ — матрицы соответственно размерностей $n\times n$, $n\times n$, $n\times m$, причем компоненты двух первых матриц — непрерывные функции, а компоненты матрицы $B(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $x \in R^n$, $\varphi \in R^n$, $v \in R^m$, $0 < \mu < 1$, $t_0 > 0$. Для определенности будем полагать, что $v(t_0) = 0$. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J[v(\cdot)] = x^T(t_f)Sx(t_f) + \int\limits_{t_0}^{t_f}\Big[x^T(t)\Phi_0(t)x(t) + x^T(t)\int\limits_\mu^1 \Phi_1(t,\theta)x(\theta t)d\theta + \int\limits_\mu^1 x^T(\theta t)\Phi_1^T(t,\theta)d\theta\, x(t) +$$

$$+ \int\limits_\mu^1 x^T(st)\Phi_2(t,s)x(st)ds + \int\limits_\mu^1\int\limits_\mu^1 x^T(\theta t)\Phi_3(t,\theta,\rho)x(\rho t)d\theta d\rho + x^T(\mu t)\Phi_4(t)x(\mu t)\Big]\,dt, \tag{2}$$

вдоль траекторий системы (1). В (2) S, $\Phi_0(t)$, $\Phi_2(t,s)$, $\Phi_4(t)$ — симметричные матрицы, $\Phi_0(t)$, $\Phi_1(t,\theta)$, $\Phi_2(t,s)$, $\Phi_3(t,\theta,\rho)$, $\Phi_4(t)$ — непрерывные матрицы-функции своих аргументов, размерность этих матриц — $n\times n$.

Формулировка результата.

Т е о р е м а 1. *Пусть*

1) $\det H(t) = \det\Big(B^T(t)\Phi_0(t)B(t) + \frac{1}{t}P_6(t,1)\Big) \neq 0$ *при* $t \in [t_0,t_f]$,

2) матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\mu}\Phi_0(t) & \Phi_1(t,\theta) \\ \Phi_1^T(t,\theta) & \Phi_2(t,\theta) \end{pmatrix}$$

неотрицательно определенная при $\theta \in [\mu,t_0]$, $t \in [t_0,t_f]$,

3) матрица $\Phi_3(t,\xi,\rho)$ *представима в виде*

$$\Phi_3(t,\theta,\rho) = \widetilde{\Phi_3}(t,\theta)\,\widetilde{\Phi_3}(t,\rho),$$

4) матрица $\Phi_4(t)$ *неотрицательно определенная,*

5) матрицы $P(t)$, $P_1(t,\theta_1)$, $P_2(t,\theta,\theta_1)$, $P_3(t,\theta_1,\theta_2) = P_3^T(t,\theta_2,\theta_1)$, $P_4(t,s) = P_4^T(t,s)$, $P_5(t,p)$, $P_6(t,r)$, $Q(t,\theta)$, $R(t,\theta,\rho) = R^T(t,\rho,\theta)$ *удовлетворяют системе уравнений*

$$\frac{dP(t)}{dt} + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \frac{1}{t}\left(P_2(t,1) + P_2^T(t,1) + P_4(t,1)\right) + \Phi_0(t) = F_0^T(t)H^{-1}(t)F_0(t),$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\sigma}{t}\frac{\partial}{\partial\sigma}\Big)P_1(t,\sigma) + A^T(t)P_1(t,\sigma) + P(t)G(t,\sigma)B(\sigma t) - \frac{1}{t}P_1(t,\sigma) + \frac{1}{t}Q(t,1,\sigma) +$$

$$+\Phi_1(t,\sigma)B(\sigma t) = F_0^T(t)H^{-1}(t)F_2(t,\sigma),$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\sigma}{t}\frac{\partial}{\partial\sigma}\Big)P_2(t,\sigma) + A^T(t)P_2(t,\sigma) + P(t)G(t,\sigma) - \frac{1}{t}\,P_2(t,\sigma) + \frac{1}{t}\,R(t,1,\sigma) +$$

$$+\Phi_1(t,\sigma) = F_0^T(t)H^{-1}(t)F_1(t,\sigma),$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\xi}{t}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\sigma}{t}\frac{\partial}{\partial \sigma}\Big)R(t,\xi,\sigma) + \Phi_3(t,\xi,\sigma) + G^T(t,\xi)P_2(t,\sigma) + P_2^T(t,\xi)G(t,\sigma) -$$

$$-\frac{2}{t}R(t,\xi,\sigma) = F_1^T(t,\xi)H^{-1}(t)F_1(t,\sigma),$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\xi}{t}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\sigma}{t}\frac{\partial}{\partial \sigma}\Big)Q(t,\xi,\sigma) + P_3(t,\xi,\sigma)B(\sigma t) + G^T(t,\xi)P_1(t,\sigma) +$$

$$+P_2^T(t,\xi)G(t,\sigma)B(\sigma t) - \frac{2}{t}Q(t,\xi,\sigma) = F_1^T(t,\xi)(H^{-1}(t))F_2(t,\sigma),$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\xi}{t}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\sigma}{t}\frac{\partial}{\partial \sigma}\Big)P_3(t,\xi,\sigma) + B^T(\xi t)P_3(t,\xi,\sigma)B(\sigma t) + B^T(\xi t)G^T(t,\xi)P_1(t,\sigma) +$$

$$+P_1^T(t,\xi)G(t,\sigma)B(\sigma t) - \frac{2}{t}P_3(t,\xi,\sigma) = F_2^T(t,\xi)H^{-1}(t)F_2(t,\sigma),$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\xi}{t}\frac{\partial}{\partial \xi}\Big)P_4(t,\xi) + \Phi_2(t,\xi) - \frac{1}{t}P_4(t,\xi) = 0,$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\xi}{t}\frac{\partial}{\partial \xi}\Big)P_5(t,\xi) + \Phi_2(t,\xi)B(\xi t) - \frac{1}{t}P_5(t,\xi) = 0,$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\xi}{t}\frac{\partial}{\partial \xi}\Big)P_6(t,\xi) + B^T(\xi t)\Phi_2(t,\xi)B(\xi t) - \frac{1}{t}P_6(t,\xi) = 0$$

с граничными условиями

$$P(t_f) = N,\ \ P(t)A_\mu(t)B(\mu t) = \frac{\mu}{t}P_1(t,\mu),\ \ \Phi_4(t)B(\mu t) = \frac{\mu}{t}P_5(t,\mu),\ \ P(t)A_\mu(t) = \frac{\mu}{t}P_2(t,\mu),$$

$$\Phi_4(t) = \frac{\mu}{t}P_4(t,\mu),\ \ B^T(\mu t)\Phi_4(t)B(\mu t) = \frac{\mu}{t}P_6(t,\mu),$$

$$P_1^T(t,\sigma)A_\mu(t)B(\mu t) + B^T(\mu t)A_\mu^T(t)P_1(t,\sigma) = \frac{\mu}{t}(P_3(t,\mu,\sigma) + P_3^T(t,\mu,\sigma)),$$

$$P_2^T(t,\sigma) + A_\mu(t)A_\mu^T(t)P_2(t,\sigma) = \frac{\mu}{t}(R(t,\mu,\sigma) + R^T(t,\mu,\sigma)),$$

$$A_\mu^T(t)P_1(t,\sigma) = \frac{\mu}{t}Q(t,\mu,\sigma),\ \ B^T(\mu)A_\mu^T(t)P_2(t,\sigma) = \frac{\mu}{t}Q^T(t,\mu,\sigma).$$

Тогда оптимальное управление, решающее задачу (1) , (2) *имеет вид*

$$\dot v(t) = \Delta v(t_0,\varphi(\cdot))\,\delta(t-t_0) + \dot v_r(t) + \Delta v(t_f, x(t_f-0))\,\delta(t-t_f).$$

Интенсивности начального и конечного импульсов вычисляются по следующим формулам:

$$\Delta v(t_0,\varphi(\cdot)) = W_0(t_0)\varphi(t_0) + \int\limits_\mu^1 W_1(t_0,\sigma)\varphi(t_0+\sigma t)\,d\sigma,$$

$$\Delta v(t_f, x(t_f-0)) = -\Big(B^TSB\Big)^- B^TSx(t_f-0) + \Big(E - \Big(B^TSB\Big)^- B^TSB\Big)p,$$

где U^- *есть полуобратная матрица матрицы* U, p – *произвольный* m*-мерный вектор. Регулярная составляющая программного оптимального управления* $\dot v_r(t)$ *определяется выражением*

$$\dot v_r(t) = \Big[\frac{dW_0(t)}{dt} + W_0(t)A(t) + W_1(t,1)\frac{1}{t}\Big]x(t) + \Big[W_0(t)A_\mu(t) - W_1(t,\mu)\frac{\mu}{t}\Big]x(\mu t) -$$

$$-\Big[\frac{dW_0(t)}{dt}B(t)+W_1(t,\mu)\frac{1}{t}B(t)-W_2(t,1)\frac{1}{t}+W_0B(t)\Big]v_r(t))+$$

$$+\Big[W_1(t,\mu)\frac{\mu}{t}B(\mu t)-W_2(t,\mu)\frac{\mu}{t}\Big]v_r(\mu t)+$$

$$+\int_\mu^1\Big[W_0(t)G(t,s)+\frac{\partial W_1(t,s)}{\partial t}-W_1(t,s)-s\frac{\partial W_1(t,s)}{\partial s}\Big]x(st)\,ds+$$

$$+\int_\mu^1\Big[\frac{\partial W_2(t,s)}{\partial t}-\frac{\partial W_1(t,s)}{\partial t}B(st)-\Big(W_1(t,s)+s\frac{\partial W_1(t,s)}{\partial s}+W_2(t,s)+s\frac{\partial W_2(t,s)}{\partial s}\Big)\Big]v(st)\,ds, \quad (3)$$

где

$$W_0(t)=-H^{-1}(t)F_0(t),\;\; W_1(t,\sigma)=-H^{-1}(t)F_1(t,\sigma),\;\; W_2(t,\sigma)=-H^{-1}(t)F_2(t,\sigma),$$

$$H(t)=B^T(t)\Phi_0(t)B(t)+\frac{1}{t}\,P_6(t,1),$$

$$F_0(t)=B^T(t)\Phi_0(t)+B_1^T(t)P(t)+\frac{1}{t}\,(P_1^T(t,1)+P_5^T(t,1)),$$

$$F_1(t,\sigma)=B^T(t)\Phi_1(t,\sigma)+B_1^T(t)P_2(t,\sigma)+\frac{1}{t}\,Q^T(t,1,\sigma),$$

$$F_2(t,\sigma)=B^T(t)\Phi_1(t,\sigma)B(\sigma t)+B_1^T(t)P_1(t,\sigma)+\frac{1}{t}\,(P_3(t,1,\sigma)+P_3^T(t,1,\sigma)).$$

З а м е ч а н и е 1. Построенное программное управление получается в результате совместного решения системы уравнений (1) и (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985.
2. *Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.* Об особых решениях в задачах оптимизации динамических систем с квадратичным критерием качества // Дифференциальные уравнения. 1975. № 4. С. 665–671.
3. *Андреева И.Ю., Сесекин А.Н.* Вырожденная линейно-квадратичная задача оптимизации с запаздыванием по времени // АиТ. 1997. № 7. С. 43-54.
4. *Сесекин А.Н., Фетисова Ю.В.* О порядке сингулярности импульсного оптимального управления в вырожденной линейно-квадратичной задаче оптимизации с последействием //Автоматика и Телемеханика. 2009. № 4. С. 31-40.
5. *Sesekin A.N.* Singular linear-quadratic control problem for systems with linear delay // American Institute of Physics. Conference Proceeding. 2013. V. 1570. P. 268-275.
6. *Bellman R., Cooke K.L.* Differential-Difference Equations. New York; London: Academic Press, 1963.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ № 13-01-00304 и Программой фундаментальных исследований УрО РАН, проект № 15-16-1-8.

Поступила в редакцию 7 мая 2015 г.

Andreeva I.Yu., Sesekin A.N. SINGULAR LINEAR-QUADRATIC OPTIMIZATION PROBLEM FOR SYSTEMS WITH LINEAR DELAY

We consider singular linear-quadratic optimization problem on the trajectories of the linear non-autonomous systems with linear delay. Under certain assumptions, the solution of this problem exists in the class of impulse controls. We have built the optimal program control that resheet this problem. Optimal control contains impulse components at the initial and final moments and inside the interval of control it is a smooth function.

Key words: singular linear-quadratic problems; linear delay.

Андреева Ирина Юрьевна, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики УралЭНИН, e-mail: i.y.andreeva@urfu.ru.

Andreeva Irina Yur'evna, Ural Federal University, Ekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics Department, e-mail: i.y.andreeva@urfu.ru.

Сесекин Александр Николаевич, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Россия, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики УралЭНИН; Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, ведущий научный сотрудник, e-mail: a.n.sesekin@urfu.ru

Sesekin Aleksandr Nikolaevich, Ural Federal University, Ekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, the Head of the Applied Mathematics Department, e-mail: a.n.sesekin@urfu.ru

УДК 517.958

О ВНУТРЕННЕЙ РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА–КУЗНЕЦОВА

© **А.П. Антонова, А.В. Фаминский**

Ключевые слова: уравнение Захарова–Кузнецова; задача Коши; внутренняя регулярность решений.

Рассматривается вопрос о внутренней регулярности слабых решений задачи Коши для уравнения Захарова–Кузнецова в случае двух пространственных переменных Устанавливается результат о существовании у этих решений производных, непрерывных в нормах Гёльдера.

В работе исследуются вопросы внутренней регулярности слабых решений задачи Коши для уравнения Захарова–Кузнецова на плоскости

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + uu_x = f(t,x,y) \tag{1}$$

($u = u(t,x,y)$) в слое $\Pi_T = (0,T) \times \mathbb{R}^2$ ($T > 0$ – произвольно) с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = u_0(x,y). \tag{2}$$

Уравнение (1) было выведено в работе [1] для описания распространения нелинейных ионно-звуковых волн в плазме, помещенной в магнитное поле, и в дальнейшем получило название уравнения Захарова–Кузнецова. Оно является одним из вариантов обобщения уравнения Кортевега–де Фриза $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$ на случай нескольких пространственных переменных.

В работе [2] была установлена глобальная корректность задачи (1), (2) при начальной функции из $H^m(\mathbb{R}^2)$ и правой части из $L_1(0,T;H^m(\mathbb{R}^2))$ при натуральных m в некотором специальном классе функций $K_m(0,T) \subset C([0,T];H^m(\mathbb{R}^2))$. Для $m = 1$ этот класс описывается следующим образом:

$$K_1(0,T) = \{u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R}^2)), \quad u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} \in L_\infty(\mathbb{R}^x; L_2((0,T)\times\mathbb{R})),$$
$$u \in L_3(0,T;W^1_\infty(\mathbb{R}^2)), \quad u \in L_2(\mathbb{R}^x; L_\infty((0,T)\times\mathbb{R}))\}.$$