УДК 517.927.2
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2128-2137

ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© С.И. Митрохин
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Изучена краевая задача для дифференциального оператора высокого порядка с разделенными граничными условиями. Потенциал оператора является суммируемой функцией на отрезке. Выведена асимптотика решений соответствующего дифференциального уравнения при больших значениях спектрального параметра. Предложен новый метод для нахождения асимптотики собственных значений изучаемого оператора.
Ключевые слова: дифференциальный оператор; краевая задача; суммируемый потенциал; разделенные граничные условия; асимптотика спектра; собственные функции

Изучим краевую задачу для дифференциального оператора восемнадцатого порядка, задаваемого дифференциальным уравнением вида

$$y^{(18)}(x)+q(x)\cdot y(x)=\lambda\cdot a^{18}\cdot y(x), 0\le x\le\pi, a>0, \tag{1}$$

с разделенными граничными условиями

$$\begin{gathered} y^{(m_1)}(0)=y^{(m_2)}(0)=\ldots=y^{(m_{17})}(0)=y^{(n_1)}(\pi)=0,\\ m_1<m_2<\ldots<m_{17}; m_k, n_1\in\{0,1,\ldots,17\}; k=1,2,\ldots,17, \end{gathered} \tag{2}$$

мы предполагаем, что потенциал $q(x)$ является суммируемой функцией на отрезке $[0;\pi]$:

$$q(x)\in L_1[0;\pi](=)\left(\int_0^x q(t)dt\right)'_x=q(x) \tag{3}$$

почти для всех $x\in[0;\pi]$.

Наша цель – найти асимптотику собственных значений дифференциального оператора (1)–(2)–(3).

В работах [1–3] была изучена асимптотика спектра дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами. Случай кусочно-гладких коэффициентов был изучен в работах [4–8]. Случай суммируемого потенциала для оператора второго порядка был впервые рассмотрен в работе [9]. В работах [10–12] автором был предложен метод исследования операторов порядка выше второго с суммируемыми коэффициентами. Была найдена асимптотика решений соответствующих дифференциальных уравнений при больших значениях спектрального параметра. С помощью этой асимптотики и соответствующих асимптотических оценок можно находить асимптотику собственных значений и асимптотику собственных функций операторов с суммируемыми коэффициентами. В случае граничных условий (2) мы одновременно изучаем целое семейство дифференциальных операторов с суммируемым потенциалом.

Для исследования спектральных свойств дифференциального оператора (1)–(2)–(3) сначала найдем асимптотику решений дифференциального уравнения (1) при больших значениях спектрального параметра λ.

Пусть $\lambda=s^{18}, s=\sqrt[18]{\lambda},$ при этом работать будем с той ветвью арифметического корня, для которой $\sqrt[18]{1}=+1$.

Обозначим через $w_k(k=1,2,\ldots,18)$ различные корни восемнадцатой степени из единицы:

$$w_k^{18}=1, w_k=e^{\frac{2\pi i}{18}(k-1)}, k=1,2,\ldots,18; w_1=1, w_2=e^{\frac{2\pi i}{18}}=\cos\left(\frac{2\pi}{18}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{18}\right)=z\ne 0, \tag{4}$$

$$w_3 = e^{\frac{4\pi i}{18}} = \cos\left(\frac{4\pi}{18}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{18}\right) = w_2^2 = z^2, w_4 = w_2^3, \ldots; w_k = w_2^{k-1}, k = 1,2,\ldots,18.$$

Для чисел $w_k(k = 1,2,\ldots,18)$ из (4) справедливы следующие равенства:

$$\sum_{k=1}^{18} w_k^m = 0, m = 1,2,\ldots,17; \sum_{k=1}^{18} w_k^m = 18, m = 0, m = 18. \quad (5)$$

С помощью метода вариации постоянных, аналогично работам [13, гл. 2; 14, гл. 4; 10; 15], устанавливается следующее утверждение.

Теорема 1. Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{18} C_k \cdot y_k(x,s); y^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{18} C_k \cdot y_k^{(m)}(x,s); m = 1,2,\ldots,17, \quad (6)$$

при этом для фундаментальной системы решений $\{y_k(x,s)\}_{k=1}^{18}$ справедливы следующие формулы и асимптотические оценки:

$$y_k(x,s) = e^{aw_k sx} - \frac{1}{18a^{17}s^{17}} \cdot A_{17,k}^0(x,s) + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|x}}{s^{34}}\right), k = 1,2,\ldots,18; \quad (7)$$

$$\frac{y_k^{(m)}(x,s)}{(as)^m} = w_k^m \cdot e^{aw_k sx} - \frac{A_{17,k}^m(x,s)}{18a^{17}s^{17}} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|x}}{s^{34}}\right), m = 1,2,\ldots,17; k = 1,2,\ldots,18; \quad (8)$$

$$A_{17,k}^0(x,s) = \sum_{n=1}^{18} w_n \cdot e^{aw_n sx} \cdot \int_0^x q(t) \cdot e^{a(w_k - w_n)st} \cdot dt_{akn}, k = 1,2,\ldots,18; \quad (9)$$

$$A_{17,k}^m(x,s) = \sum_{n=1}^{18} w_n \cdot w_n^m \cdot e^{aw_n sx} \cdot \int_0^x q(t) \cdot e^{a(w_k - w_n)st} \cdot dt_{akn}, k = 1,2,\ldots,18, m = 1,2,\ldots,17. \quad (10)$$

Из метода вывода формул (6)–(10) следуют следующие начальные условия:

$$\begin{gathered} A_{17,k}^0(0,s) = 0; A_{17,k}^m(0,s) = 0; y_k(0,s) = 1; y_k^{(m)}(0,s) = w_k^m \cdot (as)^m; y(0,s) = \sum_{k=1}^{18} C_k \cdot 1; \\ y_k^{(m)}(0,s) = \sum_{k=1}^{18} C_k \cdot w_k^m \cdot (as)^m; m = 1,2,\ldots,17; k = 1,2,\ldots,18. \end{gathered} \quad (11)$$

Используя формулы (6)–(8) и начальные условия (11), можно изучить граничные условия (2). Подставляя формулы (6) в граничные условия (2), имеем:

$$\begin{cases} y^{(m_p)}(0,s) \overset{(2)}{=} 0 \left(\overset{(6)}{=}\right) \sum_{k=1}^{18} C_k \cdot y_k^{(m_p)}(0,s) = 0, p = 1,2,\ldots,17; \\ y^{(n_1)}(\pi,s) \overset{(2)}{=} 0 \left(\overset{(6)}{=}\right) \sum_{k=1}^{18} C_k \cdot y_k^{(n_1)}(\pi,s) = 0, m_p, n_1 \in \{0,1,2,\ldots,17\}. \end{cases} \quad (12)$$

Теорема 2. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(2)–(3) имеет следующий вид:

$$g(s)=\begin{vmatrix} y_1^{(m_1)}(0,s) & y_2^{(m_1)}(0,s) & \dots & y_{17}^{(m_1)}(0,s) & y_{18}^{(m_1)}(0,s) \\ y_1^{(m_2)}(0,s) & y_2^{(m_2)}(0,s) & \dots & y_{17}^{(m_2)}(0,s) & y_{18}^{(m_2)}(0,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(m_{17})}(0,s) & y_2^{(m_{17})}(0,s) & \dots & y_{17}^{(m_{17})}(0,s) & y_{18}^{(m_{17})}(0,s) \\ y_1^{(n_1)}(\pi,s) & y_2^{(n_1)}(\pi,s) & \dots & y_{17}^{(n_1)}(\pi,s) & y_{18}^{(n_1)}(\pi,s) \end{vmatrix}=0. \tag{13}$$

Для доказательства теоремы 2 применим к системе (2) теорему Крамера: однородная система (12) имеет ненулевые решения $\left(C_1^{18}+C_2^{18}+\ldots+C_{18}^{18}\neq 0\right)$ только в том случае, когда ее определитель равен нулю.

Применив формулы (11), уравнение (13) приведем к следующему виду:

$$g(s)=\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \dots & w_{17}^{m_1} & w_{18}^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \dots & w_{17}^{m_2} & w_{18}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_{17}} & w_2^{m_{17}} & \dots & w_{17}^{m_{17}} & w_{18}^{m_{17}} \\ y_1^{(n_1)}(\pi,s) & y_2^{(n_1)}(\pi,s) & \dots & y_{17}^{(n_1)}(\pi,s) & y_{18}^{(n_1)}(\pi,s) \end{vmatrix}=0. \tag{14}$$

Раскладывая определитель $g(s)$ из (14) по последней строке, имеем:

$$g(s)=y_1^{(n_1)}(\pi,s)\cdot D_{18,1}-y_2^{(n_1)}(\pi,s)\cdot D_{18,2}+y_3^{(n_1)}(\pi,s)\cdot D_{18,3}-\ldots+y_{17}^{(n_1)}(\pi,s)\cdot D_{18,17}-y_{18}^{(n_1)}(\pi,s)\cdot D_{18,18}=0, n_1\in\{0,1,2,\ldots,17\}, \tag{15}$$

где $D_{18,k}$ – алгебраические миноры к элементу последней строки k -го столбца $(k=1,2,\ldots,18)$,

$$D_{18,18}=\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \dots & w_{16}^{m_1} & w_{17}^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \dots & w_{16}^{m_2} & w_{17}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_{16}} & w_2^{m_{16}} & \dots & w_{16}^{m_{16}} & w_{17}^{m_{16}} \\ w_1^{m_{17}} & w_2^{m_{17}} & \dots & w_{16}^{m_{17}} & w_{17}^{m_{17}} \end{vmatrix}=D_{17}\neq 0, \tag{16}$$

т. к. $D_{18,18}$ является определителем Вандермонда чисел $w_2^{m_1}, w_2^{m_2},\ldots,w_2^{m_{17}}$:

$$D_{18,18}=\det Wandermond`s\left(w_2^{m_1}, w_2^{m_2},\ldots,w_2^{m_{16}}, w_2^{m_{17}}\right)=\prod_{\substack{k>p\\ k,p\in\{1,2,\ldots,17\}}}\left(w_2^{m_k}-w_2^{m_p}\right)\neq 0. \tag{17}$$

Вводя обозначения $w_{m+18}=w_m(m=1,2,\ldots,18)$, получаем, применяя формулы (4)–(5):

$$D_{18,1}=\begin{vmatrix} w_2^{m_1} & w_3^{m_1} & \dots & w_{17}^{m_1} & w_{18}^{m_1} \\ w_2^{m_2} & w_3^{m_2} & \dots & w_{17}^{m_2} & w_{18}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^{m_{17}} & w_3^{m_{17}} & \dots & w_{17}^{m_{17}} & w_{18}^{m_{17}} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} z^{m_1} & z^{2m_1} & \dots & z^{16m_1} & z^{17m_1} \\ z^{m_2} & z^{2m_2} & \dots & z^{16m_2} & z^{17m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{m_{17}} & z^{2m_{17}} & \dots & z^{16m_{17}} & z^{17m_{17}} \end{vmatrix},$$

откуда, учитывая свойства определителей, вынося из k-й строки определителя $D_{18,1}$ множитель $z^{m_k}\,(k=1,2,\ldots,17)$, имеем:

$$D_{18,1}=z^{M_{17}}\cdot\begin{vmatrix} 1 & z^{m_1} & \dots & z^{15m_1} & z^{16m_1} \\ 1 & z^{m_2} & \dots & z^{15m_2} & z^{16m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z^{m_{17}} & \dots & z^{15m_{17}} & z^{16m_{17}} \end{vmatrix}=z^{M_{17}}\cdot\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \dots & w_{16}^{m_1} & w_{17}^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \dots & w_{16}^{m_2} & w_{17}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_{17}} & w_2^{m_{17}} & \dots & w_{16}^{m_{17}} & w_{17}^{m_{17}} \end{vmatrix}=z^{M_{17}}\cdot D_{18,18}=$$

$$=z^{M_{17}}\cdot\prod_{\substack{k>n\\ k,n\in\{1,2,\ldots,17\}}}\left(z^{m_k}-z^{m_n}\right)=z^{M_{17}}\cdot D_{17}\neq 0, M_{17}=\sum_{7n=1}^{17}m_n. \tag{18}$$

Для минора $D_{18,2}$ имеем:

$$D_{18,2}=\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_3^{m_1} & \ldots & w_{17}^{m_1} & w_{18}^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_3^{m_2} & \ldots & w_{17}^{m_2} & w_{18}^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1^{m_{17}} & w_3^{m_{17}} & \ldots & w_{17}^{m_{17}} & w_{18}^{m_{17}} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} w_3^{m_1} & w_4^{m_1} & \ldots & w_{17}^{m_1} & w_{18}^{m_1} & w_1^{m_1} \\ w_3^{m_2} & w_4^{m_2} & \ldots & w_{17}^{m_2} & w_{18}^{m_2} & w_1^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_3^{m_{17}} & w_4^{m_{17}} & \ldots & w_{17}^{m_{17}} & w_{18}^{m_{17}} & w_1^{m_{17}} \end{vmatrix},$$

откуда, учитывая, что $w_1^{m_k}=w_{19}^{m_k}=z^{18mk}$, вынесем из k-й строки определителя z^{2mk}, находим:

$$D_{18,2}=\begin{vmatrix} 1 & z^{m_1} & \ldots & z^{15m_1} & z^{16m_1} \\ 1 & z^{m_2} & \ldots & z^{15m_2} & z^{16m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z^{m_{17}} & \ldots & z^{15m_{17}} & z^{16m_{17}} \end{vmatrix}\cdot z^{M_{17}}=z^{2M_{17}}\cdot D_{17}. \tag{19}$$

Аналогичным образом получаются следующие формулы:

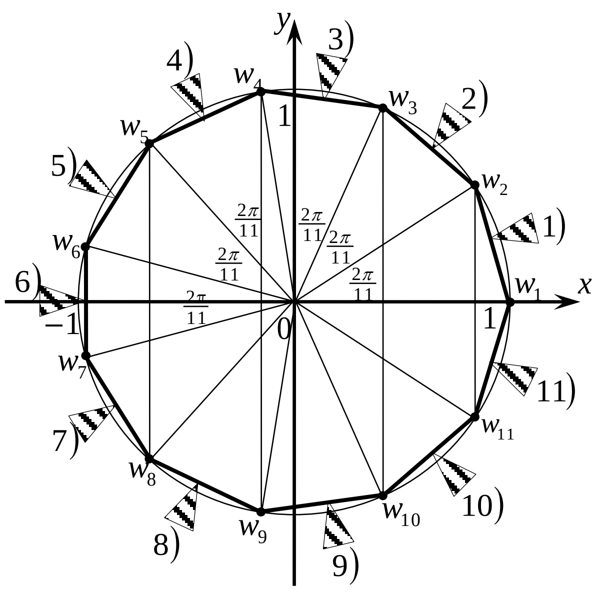
$$D_{18,3}=z^{3M_{17}}\cdot D_{17}; D_{18,4}=z^{4M_{17}}\cdot D_{17};\ldots;D_{18,k}=z^{kM_{17}}\cdot D_{17}\neq 0, k=1,2,\ldots,18; M_{17}=m_1+m_2+\ldots+m_{17}. \tag{20}$$

Учитывая формулы (7)–(8), подставим формулы (16)–(20) в уравнение (15), находим:

$$\frac{g(s)}{(as)^{n_1}\cdot D_{17}}=h_1(\pi,s)-h_2(\pi,s)+\ldots+h_{17}(\pi,s)-h_{18}(\pi,s)=0, n_1\in\{0,1,2,\ldots,17\}.$$

$$h_1(\pi,s)=\left[w_1^{n_1}\cdot e^{aw_1s\pi}-\frac{A_{17,1}^{n_1}(\pi,s)}{18a^{17}s^{17}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{34}}\right)\right]\cdot z^{M_{17}}, h_2(\pi,s)=\left[w_2^{n_1}\cdot e^{aw_2s\pi}-\frac{A_{17,2}^{n_1}(\pi,s)}{18a^{17}s^{17}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{34}}\right)\right]\times$$
$$\times z^{2M_{17}}, h_{17}(\pi,s)=\left[w_{17}^{n_1}\cdot e^{aw_{17}s\pi}-\frac{A_{17,17}^{n_1}(\pi,s)}{18a^{17}s^{17}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{34}}\right)\right]\cdot z^{17M_{17}}, h_{18}(\pi,s)=\left[w_{18}^{n_1}\cdot e^{aw_{18}s\pi}-\frac{A_{17,18}^{n_1}(\pi,s)}{18a^{17}s^{17}}+\right. \tag{21}$$
$$\left.+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{34}}\right)\right]\cdot z^{18M_{17}}, n_1\in\{0,1,2,\ldots,17\}.$$

Индикаторная диаграмма уравнения (21) имеет вид, аналогичный следующему:



(22)

Таким образом, индикаторная диаграмма [16, гл. 12] представляет собой правильный восемнадцатиугольник, вершинами которого являются точки $w_k(k=1,2,\ldots,18)$ из (4), при этом корни уравнения (21) могут находиться только в восемнадцати заштрихованных секторах бесконечно малого раствора, биссектрисы которых являются серединными перпендикулярами к сторонам этого восемнадцатиугольника. Поэтому из общей теории нахождения корней функций вида (21) следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. Уравнение на собственные значения оператора (1)–(2)–(3) в секторе 1), соответствующем отрезку $[w_1; w_2]$ индикаторной диаграммы (22), имеет следующий вид:

$$g_1(s)=(as)^{n_1}\cdot D_{17}\cdot z^{M_{17}}\cdot\left\{\left[\left[w_1^{n_1}\cdot e^{aw_1 s\pi}-\frac{A_{17,1}^{n_1}(\pi,s)}{18a^{17}s^{17}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{34}}\right)\right]-z^{M_{17}}\cdot\left[w_2^{n_1}\cdot e^{aw_2 s\pi}-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{A_{17,2}^{n_1}(\pi,s)}{18a^{17}s^{17}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{34}}\right)\right]\right]\right\}=0. \tag{23}$$

Для нахождения корней функции $g_1(s)$ из (23) перепишем ее в следующем виде:

$$g_1(s)=g_{10}(s)-\frac{1}{18a^{17}s^{17}}\cdot g_{1,17}(s)+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{34}}\right)=0, \tag{24}$$

$$g_{10}(s)=w_1^{n_1}\cdot e^{aw_1 s\pi}-z^{M_{17}}\cdot w_2^{n_1}\cdot e^{aw_2 s\pi}, \tag{25}$$

$$g_{1,17}(s)=A_{17,1}^{n_1}(\pi,s)-z^{M_{17}}\cdot A_{17,2}^{n_1}(\pi,s). \tag{26}$$

Поделив в уравнении (24)–(25) на $w_1^{n_1}\cdot e^{aw_2 s\pi}\neq 0$, имеем:

$$\tilde{g}_1(s)=\tilde{g}_{10}(s)-\frac{1}{18a^{17}s^{17}}\cdot\tilde{g}_{1,17}(s)+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{34}}\right)=0, \tag{27}$$

$$\tilde{g}_{10}(s)=e^{a(w_1-w_2)s\pi}-z^{M_{17}}\cdot w_2^{n_1}\cdot w_1^{-n_1}, \tag{28}$$

$$\tilde{g}_{1,17}(s)=w_1^{-n_1}\cdot e^{-aw_2 s\pi}A_{17,1}^{n_1}(\pi,s)-z^{M_{17}}\cdot w_1^{-n_1}\cdot e^{-aw_2 s\pi}A_{17,2}^{n_1}(\pi,s). \tag{29}$$

Основное приближение уравнения (27)–(29) имеет вид $\tilde{g}_{10}(s)=0$. Учитывая, что $z=w_2=e^{\frac{2\pi i}{18}}, w_1=1$, находим, что $\tilde{g}_{10}(s)=0$ только в следующем случае:

$$\exp[a\pi s\cdot(w_1-w_2)]=z^{M_{17}}\cdot z^{n_1}\cdot e^{2\pi ik}(=)\exp[a\pi s\cdot(w_1-w_2)]=\exp\left(\frac{2\pi i}{18}(M_{17}+n_1)+2\pi ik\right), k\in Z.$$

Следовательно, корни основного приближения уравнения (27)–(29) (т. е. корни уравнения $\tilde{g}_{10}(s)=0$) находятся в явном виде по формуле

$$s_{k,1,осн}=\frac{2i\tilde{k}}{a\cdot(w_1-w_2)}, \tilde{k}=k+\frac{1}{18}\cdot(M_{17}+n_1), M_{17}=\sum_{n=1}^{17}m_n.$$

Из общей теории нахождения асимптотики корней целых функций вида (27)–(29) [2; 17, гл. 1; 18–19]) следует, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(2)–(3) в секторе 1) индикаторной диаграммы (22) имеет следующий вид:

$$s_{k,1}=\frac{2i\tilde{k}}{a\cdot(w_1-w_2)}+\frac{2i\cdot d_{17,k,1}}{a\cdot(w_1-w_2)\cdot\tilde{k}^{17}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{34}}\right), \tilde{k}=k+\frac{1}{18}\cdot(M_{17}+n_1), k\in Z. \tag{30}$$

Для доказательства теоремы 4 достаточно вычислить коэффициенты $d_{17,k,1}$ из (30) в явном виде. Применяя формулы (9)–(10) для выражений $A^{n_1}_{17,1}(\pi,s)$ и $A^{n_1}_{17,2}(\pi,s)$ из (29) и формулы Маклорена, находим:

$$\begin{gathered} A^{n_1}_{17,1}(\pi,s)\Big|_{s_{k,1}} = \Bigg[w_1 \cdot w_1^{n_1} \cdot e^{aw_1 s\pi} \cdot \int_0^\pi q(t) \cdot \exp\big((w_1 - w_1)as\pi\big)dt_{a11} + w_2 \cdot w_2^{n_1} \cdot e^{aw_2 s\pi} \cdot \int_0^\pi q(t) \times \\ \times \exp\big(w_1 - w_2)as\pi\big)dt_{a12} + \overset{=}{o}(1) \Bigg]\Bigg|_{s_{k,1}}, \\ A^{n_1}_{17,2}(\pi,s)\Big|_{s_{k,1}} = \Bigg[w_1 \cdot w_1^{n_1} \cdot e^{aw_1 s\pi} \cdot \int_0^\pi q(t) \cdot \exp\big((w_2 - w_1)as\pi\big)dt_{a21} + w_2 \cdot w_2^{n_1} \cdot e^{aw_2 s\pi} \cdot \int_0^\pi q(t) \times \\ \times \exp\big((w_2 - w_2)as\pi\big)dt_{a22} + \overset{=}{o}(1) \Bigg]\Bigg|_{s_{k,1}}. \end{gathered} \tag{31}$$

$$e^{a(w_1-w_2)s\pi}\Big|_{s_{k,1}} = z^{M_{17}} \cdot z^{n_1} \cdot \left[1 + \frac{2\pi i d_{17,k,1}}{\tilde{k}^{17}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{34}}\right)\right], \tag{32}$$

$$\frac{1}{s^{17}}\bigg|_{s_{k,1}} = \frac{1}{2^{17} \cdot i^{17} \cdot \tilde{k}^{17}} \cdot a^{17} \cdot (w_1 - w_2)^{17} \cdot \left[1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{18}}\right)\right], \tag{33}$$

Подставляя формулы (30)–(33) в уравнение (27)–(29) и проводя необходимые преобразования, получаем:

$$\begin{gathered} \left[z^{M_{17}} \cdot z^{n_1} + z^{M_{17}} \cdot z^{n_1} \cdot \frac{2\pi i \cdot d_{17,k,1}}{\tilde{k}^{17}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{34}}\right) - z^{M_{17}} \cdot z^{n_1} \right] - \frac{a^{17}(w_1 - w_2)^{17}}{18a^{17} \cdot 2^{17} \cdot i^{17} \cdot \tilde{k}^{17}} \cdot \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{18}}\right)\right) \times \\ \times \Bigg\{ \Bigg[w_1 \cdot e^{a(w_1-w_2)s\pi} \cdot \left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a11} - w_2 \cdot w_2^{n_1} \cdot z^{M_{17}} \cdot \left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a22} \Bigg] - \Bigg[w_1 \cdot z^{M_{17}} \cdot e^{a(w_1-w_2)s\pi} \cdot \left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a21} + \\ + w_2 \cdot z^{n_1} \cdot z^{M_{17}} \cdot z^{M_{17}} \cdot \left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a12} \Bigg] \Bigg\} \Bigg|_{s=s_{k,1,осн}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{34}}\right) = 0. \end{gathered} \tag{34}$$

Из формул (4)–(5) выводим:

$$w_1 - w_2 = 1 - z = 1 - e^{\frac{2\pi i}{18}} = e^{\frac{\pi i}{18}} \cdot \left[e^{-\frac{\pi i}{18}} - e^{\frac{\pi i}{18}} \right] = (-2i) \cdot e^{\frac{\pi i}{18}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{18}\right). \tag{35}$$

Подставляя (35) в (34) и учитывая, что $\left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a11} = \left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a22} = \int_0^\pi q(t)dt_{a11}$, имеем:

$$\begin{gathered} d_{17,k,1} = \frac{1}{18\pi} \cdot \frac{1}{z^{M_{17}} \cdot z^{n_1} \cdot 2^{18}} \cdot (w_1 - w_2)^{17} \cdot \Bigg\{ \Bigg[w_1 \cdot z^{M_{17}} \cdot z^{n_1} \left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a11} - w_2 \cdot z^{M_{17}} \cdot z^{n_1} \left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a22} \Bigg] + \\ + \Bigg[w_2 \cdot z^{M_{17}} \cdot z^{-M_{17}} \cdot z^{n_1} \left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a12} - w_1 \cdot z^{M_{17}} \cdot z^{M_{17}} \cdot z^{n_1} \left(\int_0^\pi \ldots\right)_{a21} \Bigg] \Bigg\} \Bigg|_{s=s_{k,1,осн}}. \end{gathered} \tag{36}$$

Вторая из скобок в формуле (36) равна:

$$\left[w_2\cdot z^{n_1}\cdot\left(\int_0^{\pi}\ldots\right)_{a12}-w_1\cdot z^{2M_{17}}\cdot z^{n_1}\cdot\left(\int_0^{\pi}\ldots\right)_{a21}\right]\Bigg|_{s=s_{k,1,осн}}=\left[z\cdot z^{n_1}\cdot\int_0^{\pi}q(t)\cdot e^{a(w_1-w_2)st}dt_{a12}-z^{n_1}\cdot z^{2M_{17}}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^{\pi}q(t)\cdot e^{a(w_2-w_1)st}dt_{a21}\right]\Bigg|_{s=\frac{2i\tilde{k}}{a\cdot(w_1-w_2)}}=z^{n_1}\cdot z^{M_{17}}\cdot e^{\frac{\pi i}{18}}\cdot e^{\frac{\pi i}{18}}\cdot e^{-\frac{2\pi i}{18}\cdot M_{17}}\cdot\int_0^{\pi}q(t)\cdot\exp\left[at\cdot 2i\cdot\frac{\tilde{k}}{a}\right]dt- \tag{37}$$

$$-z^{n_1}\cdot z^{M_{17}}\cdot e^{\frac{2\pi i}{18}\cdot M_{17}}\cdot\int_0^{\pi}q(t)\cdot\exp\left[-2\tilde{k}ti\right]dt=e^{\frac{\pi i}{18}}\cdot z^{n_1}\cdot z^{M_{17}}\cdot 2i\int_0^{\pi}q(t)\cdot\sin\left[2\tilde{k}t+\frac{\pi}{18}-\frac{2\pi}{18}\cdot M_{17}\right]dt_{n1}.$$

Поэтому из (36)–(37) выводим:

$$d_{17,k,1}=\frac{(w_1-w_2)^{18}}{18\pi\cdot 2^{18}}\cdot\left[\int_0^{\pi}q(t)dt_{a11}-\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)}\cdot\left(\int_0^{\pi}\ldots\right)_{n1}\right],k\in Z, \tag{38}$$

$M_{17}=\sum_{k=1}^{17}m_k,\tilde{k}=k+\frac{M_{17}+n_1}{18}$, интеграл $\left(\int_0^{\pi}\ldots\right)_{n1}$ определен в (37).

Таким образом, теорема 4 полностью доказана.

Изучая подробно индикаторную диаграмму (22) и соответствующие ей уравнения на собственные значения, аналогично уравнению (23), приходим к справедливости следующего утверждения.

Теорема 5. 1) В секторе 2) индикаторной диаграммы (22) асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(2)–(3) имеет вид:

$$s_{k,2}=s_{k,1}\cdot e^{\frac{2\pi i}{18}}, \tag{39}$$

где $s_{k,1}$ определены в (30), (37)–(38).

2) Для остальных секторов индикаторной диаграммы (22) справедливы формулы:

$$s_{k,n}=s_{k,1}\cdot e^{\frac{2\pi i}{18}(n-1)},n=1,2,3,\ldots,18;s_{k,n+18}=s_{k,n},n=1,2,\ldots,18. \tag{40}$$

3) При этом собственные значения дифференциального оператора (1)–(2)–(3) находятся по формуле

$$\lambda_{k,n}=s_{k,n}^{18},n=1,2,\ldots,18;k=1,2,3,\ldots \tag{41}$$

С помощью формул (30) и (37)–(41) доказывается следующая теорема о поведении собственных функций дифференциального оператора (1)–(2)–(3).

Теорема 6. Собственные функции $g_k(x,s_k)(k=1,2,3,\ldots)$ дифференциального оператора (1)–(2)– (3), соответствующие собственным значениям λ_k из (40)–(41), вычисляются по следующей формуле:

$$g_k(x,s_k)=\begin{vmatrix} y_1^{(m_1)}(0,s) & y_2^{(m_1)}(0,s) & \ldots & y_{17}^{(m_1)}(0,s) & y_{18}^{(m_1)}(0,s)\\ y_1^{(m_2)}(0,s) & y_2^{(m_2)}(0,s) & \ldots & y_{17}^{(m_2)}(0,s) & y_{18}^{(m_2)}(0,s)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(m_{17})}(0,s) & y_2^{(m_{17})}(0,s) & \ldots & y_{17}^{(m_{17})}(0,s) & y_{18}^{(m_{17})}(0,s)\\ y_1(x,s) & y_2(x,s) & \ldots & y_{17}(x,s) & y_{18}(x,s)\end{vmatrix}. \tag{42}$$

Применяя формулы (11), формулу (42) можно переписать в следующем виде:

$$g_k(x,s_k)=\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \ldots & w_{17}^{m_1} & w_{18}^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \ldots & w_{17}^{m_2} & w_{18}^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1^{m_{17}} & w_2^{m_{17}} & \ldots & w_{17}^{m_{17}} & w_{18}^{m_{17}} \\ y_1(x,s) & y_2(x,s) & \ldots & y_{17}(x,s) & y_{18}(x,s) \end{vmatrix}. \tag{43}$$

Формула (43) позволяет аналогично работам [15] и [20] вычислить асимптотику собственных функций дифференциального оператора (1)–(2)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садовничий В.А.* О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Математический сборник. 1967. Т. 72. № 2. С. 293-310.
2. *Лидский В.Б., Садовничий В.А.* Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Математический сборник. 1968. Т. 65. № 4. С. 558-566.
3. *Чернятин В.А.* Асимптотики высшего порядка спектра оператора Штурма–Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 2. С. 206-215.
4. *Ильин В.А.* О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // Математические заметки. 1977. Т. 22. № 5. С. 698-723.
5. *Gottlieb H.P.W.* Iso-spectral Operators: Some Model Examples with Discontinuous Coefficients // Journal of Math. Anal. and Appl. 1988. V. 132. P. 123-137.
6. *Будаев В.Д.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций оператора второго порядка с разрывными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 6. С. 941-952.
7. *Митрохин С.И.* О спектральных свойствах дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С. 530-532.
8. *Митрохин С.И.* О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // Доклады АН. 1997. Т. 356. № 1. С. 13-15.
9. *Винокуров В.А., Садовничий В.А.* Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Известия РАН. Серия математическая. 2000. Т. 64. № 4. С. 47-108.
10. *Митрохин С.И.* Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестник Московского университета. Серия 1: математика, механика. 2009. № 3. С. 14-17.
11. *Митрохин С.И.* О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3. № 4. С. 95-115.
12. *Митрохин С.И.* Асимптотика собственных значений дифференциального оператора десятого порядка с суммируемым потенциалом // Успехи современного естествознания. 2010. № 3. С. 146-149.
13. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
14. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
15. *Митрохин С.И.* Спектральные свойства краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений с интегрируемыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1085-1093.
16. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
17. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970. 672 с.
18. *Садовничий В.А., Любишкин В.А.* О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 1. С. 109-116.
19. *Садовничий В.А., Любишкин В.А., Белабасси Ю.* О регуляризованных суммах корней целой функции одного класса // Доклады АН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1346-1348.
20. *Mitrokhin S.I.* About effect of splitting for the differential operator of the fourth order with the summable potential // European Journal of Natural History. 2011. V. 1. P. 33-40.

Поступила в редакцию 10 мая 2016 г.

Митрохин Сергей Иванович, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор РАЕ, e-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

UDC 517.927.2
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2128-2137

ABOUT RESEARCH OF THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE SPECTRUM OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE DIFFERENTIAL OPERATOR OF A HIGH ORDER WITH A SUMMABLE POTENTIAL

© S.I. Mitrokhin
Lomonosov Moscow State University
1 Leninskie Gory, Moscow, Russian Federation, 119991
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

The boundary value problem for the differential operator of a high order with the separated boundary conditions is studied. The potential of the operator is summable function on the interval. The asymptotics of solutions of the corresponding differential equation for large values of spectral parameter is derived. The new method for finding of the asymptotics of eigenvalues of the studied operator is offered.
Key words: differential operator; boundary value problem; summable potential; separated boundary conditions; asymptotic behavior of spectrum; eigenfunction

REFERENCES

1. Sadovnichiy V.A. O sledakh obyknovennykh differentsial'nykh operatorov vysshikh poryadkov [About traces of ordinary differential operators of highest order]. *Matematicheskiy sbornik – Sbornik: Mathematics*, 1967, vol. 72, no. 2, pp. 293-310. (In Russian).
2. Lidskiy V.B., Sadovnichiy V.A. Asimptoticheskie formuly dlya korney odnogo klassa tselykh funktsiy [Asymptotic formula for one class roots of all-zero functions]. *Matematicheskiy sbornik – Sbornik: Mathematics*, 1968, vol. 65, no. 4, pp. 558-566. (In Russian).
3. Chernyatin V.A. Asimptotiki vysshego poryadka spektra operatora Shturma–Liuvillya [Asymptotic behavior of highest order of Shturma–Liuvillya operator]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 2, pp. 206-215. (In Russian).
4. Il'in V.A. O skhodimosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam v tochkakh razryva koeffitsientov differentsial'nogo operatora [About convergency of degradation on the functions in points of discontinuity of coefficients of differential operator]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 1977, vol. 22, no. 5, pp. 698-723. (In Russian).
5. Gottlieb H.P.W. Iso-spectral Operators: Some Model Examples with Discontinuous Coefficients. *Journal of Math. Anal. and Appl.*, 1988, vol. 132, pp. 123-137.
6. Budaev V.D. O bezuslovnoy bazisnosti na zamknutom intervale sistem sobstvennykh i prisoedinennykh funktsiy operatora vtorogo poryadka s razryvnymi koeffitsientami [About absolute basis property at closed interval of systems of proper and associated function of operator of the second order with discontinuous coefficient]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1987, vol. 23, no. 6, pp. 941-952. (In Russian).
7. Mitrokhin S.I. O spektral'nykh svoystvakh differentsial'nykh operatorov s razryvnymi koeffitsientami [About spectral properties of differential operators with discontinuous coefficients]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1992, vol. 28, no. 3, pp. 530-532. (In Russian).
8. Mitrokhin S.I. O nekotorykh spektral'nykh svoystvakh differentsial'nykh operatorov vtorogo poryadka s razryvnoy vesovoy funktsiey *Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 1997, vol. 356, no. 1, pp. 13-15. (In Russian).
9. Vinokurov V.A., Sadovnichiy V.A. Asimptotika lyubogo poryadka sobstvennykh znacheniy i sobstvennykh funktsiy kraevoy zadachi Shturma–Liuvillya na otrezke s summiruemym potentsialom [Asymptotic behavior of every order of eigenvalue and eigen functions of boundary value of Shturm–Liuvillya at the piece with sum potential]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya matematicheskaya – Izvestiya: Mathematics*, 2000, vol. 64, no. 4, pp. 47-108. (In Russian).
10. Mitrokhin S.I. Asimptotika sobstvennykh znacheniy differentsial'nogo operatora chetvertogo poryadka s summiruemymi koeffitsientami [The asymptotics of the eigenvalues of a fourth order differential operator with summable coefficients]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: matematika, mekhanika – Moscow State University Bulletin. Series 1. Mathematics. Mechanics*, 2009, no. 3, pp. 14-17. (In Russian).
11. Mitrokhin S.I. O spektral'nykh svoystvakh odnogo differentsial'nogo operatora s summiruemymi koeffitsientami s zapazdyvayushchim argumentom [On spectral properties of a differential operator with summable coefficients with a retarded argument]. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal – Ufa Mathematical Journal*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 95-115. (In Russian).
12. Mitrokhin S.I. Asimptotika sobstvennykh znacheniy differentsial'nogo operatora desyatogo poryadka s summiruemym potentsialom [Asymptotic behavior of eigen values of differential operator of tenth order with summing potential]. *Uspekhi sovremennogo estestvoznaniya – Advances in current natural sciences*, 2010, no. 3, pp. 146-149. (In Russian).
13. Naymark M.A. *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear differential operator]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 528 p. (In Russian).
14. Fedoryuk M.V. *Asimptoticheskie metody dlya lineynykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Asymptotic behavior methods for linear ordinary differential equation]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 352 p. (In Russian).

15. Mitrokhin S.I. Spektral'nye svoystva kraevykh zadach dlya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy s integriruemymi koeffitsientami [Spectral properties of boundary values for functional-differential equations with integral coefficients]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 8, pp. 1085-1093. (In Russian).
16. Bellman R., Kuk K.L. *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-different equations]. Moscow, Mir Publ., 1967. 548 p. (In Russian).
17. Levitan B.M., Sargsyan I.S. *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu* [Introduction in spectral theory]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 672 p. (In Russian).
18. Sadovnichiy V.A., Lyubishkin V.A. O nekotorykh novykh rezul'tatakh teorii regulyarizovannykh sledov differentsial'nykh operatorov [About some new results of theory of regularized traces of differential operators]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 109-116. (In Russian).
19. Sadovnichiy V.A., Lyubishkin V.A., Belabassi Yu. O regulyarizovannykh summakh korney tseloy funktsii odnogo klassa [About regularized radical union of entire function of one class]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 1980, vol. 254, no. 6, pp. 1346-1348. (In Russian).
20. Mitrokhin S.I. About effect of splitting for the differential operator of the fourth order with the summable potential. *European Journal of Natural History*, 2011, vol. 1, pp. 33-40.

Received 10 May 2016

Mitrokhin Sergey Ivanovich, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of RAS, e-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Информация для цитирования:

Митрохин С.И. Об асимптотике спектра краевой задачи для дифференциального оператора высокого порядка с суммируемым потенциалом // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2128-2137. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2128-2137

Mitrokhin S.I. Ob asimptotike spektra kraevoy zadachi dlya differentsial'nogo operatora vysokogo poryadka s summiruemym potentsialom [About research of the asymptotic behavior of the spectrum of a boundary value problem for the differential operator of a high order with a summable potential]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 2128-2137. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2128-2137 (In Russian).