УДК 517.713

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИЙ РАЗМЕТКИ ПРИ РАБОТЕ С ЦИКЛАМИ БАЗИСНОГО КОНЕЧНОГО АВТОМАТА

© **А.А. Мельникова**

Ключевые слова: недетерминированный конечный автомат; базисный автомат; алгоритмы эквивалентного преобразования; вершинная минимизация; дуговая минимизация; функции разметки состояний.

В данной статье рассматриваются базисные конечные автоматы Рабина–Скотта, определённые ранее автором и используемые для решения различных задач в теории регулярных языков, в частности, задач минимизации конечных автоматов по различным критериям. Для базисных автоматов определяется цвет дуг с помощью инъективной функции. Исследуются различные пути и циклы графа переходов базисного автомата, соответствующие путям и циклам графа переходов некоторого автомата, возможно определяющего данный регулярный язык. С помощью обобщённых функций разметки формулируется алгоритм добавления дуги в недетерминированный конечный автомат.

В работе используются определения и обозначения из статей [1–5]. Рассмотрим

$$K = (\, Q, \Sigma, \delta, S, F) \tag{1}$$

— недетерминированный конечный автомат Рабина–Скотта (НКА) для некоторого регулярного языка L над алфавитом Σ. Запись $L = \mathcal{L}(K)$ показывает, что автомат K определяет язык L.

Зеркальный к K конечный автомат K^R задаёт зеркальный (инверсный) к L язык L^R. Через $\mathcal{L}^{in}_K(q)$ и $\mathcal{L}^{out}_K(q)$ будем обозначать входной и выходной языки состояния q соответственно, т. е. языки, определяемые автоматами $(\, Q, \Sigma, \delta, S, \{q\}\,)$ и $(\, Q, \Sigma, \delta, \{q\}, F\,)$ соответственно. Бинарное отношение $\#$ (см. [1], подробные примеры построения см. [3, 4]) задаётся на множестве пар состояний двух канонических автоматов $\widetilde{L} = (\, Q_\pi, \Sigma, \delta_\pi, \{s_\pi\}, F_\pi\,)$ и $\widetilde{L}^R = (\, Q_\rho, \Sigma, \delta_\rho, \{s_\rho\}, F_\rho\,)$ — для заданного языка L и для инверсного языка L^R следующим образом:

$$\begin{gathered} A\#X \quad \text{тогда и только тогда, когда} \\ (\exists uv \in L)\ \left(u \in \mathcal{L}^{in}_{\widetilde{L}}(A), v^R \in \mathcal{L}^{in}_{\widetilde{L^R}}(X)\right), \end{gathered}$$

где $\# \subseteq Q_\pi \times Q_\rho$. В статье [2] автором данной работы был определён и исследован базисный автомат $\mathcal{BA}(L)$. Базисный автомат является наряду с каноническим автоматом, ещё одним инвариантом регулярного языка. Благодаря своим свойствам, он используется во многих задачах теории регулярных языков (см.[2–5]). Пусть $\mathcal{BA}(L) = (\, \mathcal{T}, \Sigma, \delta_T, S_T, F_T\,)$ — базисный автомат над некоторым алфавитом Σ для рассматриваемого языка L. Множество $\mathcal{T} = \{(A, X) \mid$ для любого $A \in Q_\pi$, $X \in Q_\rho$, $A\#X\}$; при этом для $T = (A, X) \in \mathcal{T}$ будем использовать обозначения $A = \alpha(T)$ и $X = \beta(T)$.

Для заданного регулярного языка L рассмотрим определяющий его произвольный НКА K, а также произвольный всюду определённый автомат (по определению являющийся детерминированным) $Z = (\, Q_Z, \Sigma, \delta_Z, \{s_Z\}, F_Z\,)$. Для этой пары автоматов K и Z $\varphi^{in}_{KZ} : Q \to \mathcal{P}(Q_Z)$ является обобщённой функцией разметки (для краткости, функцией разметки), если для каждых $q \in Q$ и $\widetilde{q} \in Q_Z$ множество $\varphi^{in}_{KZ}(q)$ содержит $\widetilde{q}$ в том и только том случае, если

$$\mathcal{L}^{in}_K(q) \cap \mathcal{L}^{in}_Z(\widetilde{q}) \neq \varnothing \ .$$

Функцию $\varphi^{in}_{K\widetilde{K}}$ (то есть когда рассматриваемые автоматы, исследуемый и канонический, эквивалентны) будем кратко обозначать φ^{in}_{K} и называть *прямой функцией разметки.*

Определим функцию

$$\varphi^{out}_{K} : Q \to \mathcal{P}(Q_\rho)$$

следующим образом: для каждого $q \in Q$ положим

$$\varphi^{out}_{K}(q) = \varphi^{in}_{K^R}(q)\,.$$

Эту функцию будем называть *обратной функцией разметки.*

Отметим, что в процессе построения эквивалентного канонического автомата, выполненного специальным образом, можно получить и более простой алгоритм построения этих функций (см., например, [4, 5]).

Обозначим множество всех дуг базисного автомата $\mathcal{BA}(L)$ через $\Gamma_{\mathcal{BA}}$. Это множество не может включать дуги, помеченные пустым словом ε, т. к. в канонических автоматах $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L}^R$ нет дуг с такими пометками. Дуги задаются функцией переходов базисного автомата δ_T: для любых $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ и $a \in \Sigma$ считаем, что $\delta_T(T_1, a) \ni T_2$, тогда и только тогда, когда $\delta_\pi(\alpha(T_1), a) \ni \alpha(T_2)$ и $\delta_\rho(\beta(T_2), a) \ni \beta(T_1)$. Каждая дуга определяется тройкой вида (T_1, a, T_2). Дуги, отличающиеся хотя бы одной компонентой, считаются различными.

О п р е д е л е н и е. Для базисного автомата $\mathcal{BA}(L)$ определим цвет дуг с помощью инъективной функции $\psi_{\mathcal{BA}} : \Gamma_{\mathcal{BA}} \to \mathcal{N}$, ставящей в соответствие каждой дуге $\Gamma \in \Gamma_{\mathcal{BA}}$ натуральное число $n \in \mathcal{N}$.

Можно рассматривать различные пути и циклы графа переходов базисного автомата, соответствующие путям и циклам графов переходов канонических автоматов, а также некоторого автомата, возможно определяющего данный регулярный язык. Последние автоматы получаются при использовании различных алгоритмов эквивалентного преобразования автоматов, например, при минимизации автоматов по различным критериям. При этом бывает удобным добавление некоторой дуги, а затем применение к полученному автомату алгоритма минимизации.

Можно сформулировать алгоритм добавления цветной дуги в недетерминированный автомат, в соответствии с приведённым в [4], выраженный следующей теоремой.

Т е о р е м а 1. *Пусть заданы язык L и некоторый определяющий его НКА K (1); пусть заданы некоторые состояния $q_1, q_2 \in Q$. Пусть для некоторых состояний (A, X) и (B, Y) базисного автомата $\mathcal{BA}(L)$ (допускается возможность $A = B$ и/или $X = Y$) выполнено следующее: $A \in \varphi^{in}_{K}(q_1)$, $X \in \varphi^{out}_{K}(q_1)$, $B \in \varphi^{in}_{K}(q_2)$, $Y \in \varphi^{out}_{K}(q_2)$, и, кроме того, для некоторой буквы $a \in \Sigma$ выполнено условие $(q_1, a, q_2) \in \Gamma_{\mathcal{BA}}$ (это, например, «зелёная» дуга с номером n). Тогда для автомата K', полученного из автомата (1) добавлением дуги (q_1, a, q_2), выполнено условие $L(K') = L(K)$. Кроме того, при этом не появляется нового цикла, не соответствующего некоторому циклу базисного автомата.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство теоремы следует из из соответствующего доказательства теоремы 4 из [5] и введённого определения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Melnikov B.* A new algorithm of the state-minimization for the nondeterministic finite automata // The Korean Journal of Computational and Applied Mathematics. 1999. Vol.6. № 2. P. 277-290.

2. *Vakhitova A.* The basis automaton for the given regular language // The Korean Journal of Computational and Applied Mathematics. 1999. Vol.6. № 3. P. 617-624.

3. *Мельникова А.А.* Базисные автоматы в решении проблемы оптимизации // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2007. Т 12. Вып. 4. С. 492-494.

4. *Мельников Б.Ф., Мельникова А.А.* Многоаспектная минимизация недетерминированных конечных автоматов. Часть I. Вспомогательные факты и алгоритмы // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2011. № 4 (20). С. 59-69.

5. *Мельников Б.Ф., Мельникова А.А.* Многоаспектная минимизация недетерминированных конечных автоматов. Часть II. Основные алгоритмы // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2012. № 1 (21). С. 31-43.

Поступила в редакцию 11 июня 2015 г.

Melnikova A.A. USING THE STATE-MARKING FUNCTIONS WHEN WORKING WITH THE CYCLES OF THE BASIS FINITE AUTOMATON

We consider in this paper the basis finite Rabin-Scott's automaton defined earlier by the author and used to solve various problems in the theory of regular languages, in particular, to minimize finite automatons tasks by various criteria. For the basis automaton, the color of the edges is defined by using injective function. Different ways and cycles of the transition graph of the basis automaton corresponding to the ways and cycles of the transition graph of some automaton possibly defining a given regular language are explored. With the help of generalized state-marking functions, an algorithm for adding an edge in non-deterministic finite automaton is formulated.

Key words: nondeterministic finite automaton; basis automaton; algorithms of equivalent transformation; state-minimization; edge-minimization; state-marking functions.

Мельникова Александра Александровна, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», филиал в г. Димитровграде, Ульяновская область, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики, e-mail: avahi@mail.ru

Melnikova Aleksandra Aleksandrovna, National Research Nuclear University, Dimitrovgrad, Ul'yanov region, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics, e-mail: avahi@mail.ru

УДК 519.833

МЕТОД ОПОРНЫХ ФУНКЦИЙ В БИЛИНЕЙНОЙ ИГРЕ ДВУХ ЛИЦ

© И.М. Минарченко

Ключевые слова: равновесие по Нэшу; функция Никайдо–Исода; невыпуклая оптимизация; метод опорных функций.

В работе рассматривается билинейная игра двух лиц без предположения о выпуклости функций потерь игроков. Строится функция Никайдо–Исода, и поиск равновесия по Нэшу в игре сводится к задаче оптимизации с невыпуклой и неявно заданной целевой функцией, что требует применения методов глобального поиска. Для решения полученной задачи предлагается вариант метода опорных функций. Такой подход не только позволяет найти равновесную точку, но и даёт ответ об отсутствии равновесий в игре, если их нет.

Поиск равновесия по Нэшу в общем случае является трудной задачей. Однако существует подход, который применим при достаточно общих предположениях, в том числе когда существование равновесия не гарантируется, например, теоремой Какутани. Суть подхода заключается в сведении исходной игровой постановки к минимаксной задаче, которую можно рассматривать как частный случай задачи оптимизации (о минимаксных задачах см., например, [1]). Решив полученную задачу, мы либо найдём одну из равновесных точек, либо придём к заключению, что равновесий в игре не существует. Платой за данную возможность