Дзюба Сергей Михайлович, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем, e-mail: sdzyuba@mail.ru

Dzyuba Sergei Mikhailovich, Tver State Technical University, Tver, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department, e-mail: sdzyuba@mail.ru

Емельянова Ирина Игоревна, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры информационных систем, e-mail: emelyanova-123@yandex.ru

Emelyanova Irina Igorevna, Tver State Technical University, Tver, the Russian Federation, Senior Lecturer of the Information Systems Department, e-mail: emelyanova-123@yandex.ru

УДК 517.958

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

© И.Б. Бадриев, В.В. Бандеров, Г.З. Гарипова, М.В. Макаров

Ключевые слова: трехслойная пластина; седловая точка; трансверсально-мягкий заполнитель; теорема существования.

Рассмотрена одномерная геометрически линейная задача об определении напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем при наличии ограничений на уровень формирующихся в заполнителе поперечных касательных напряжений. Обобщенная постановка сформулирована в виде задачи об отыскании седловой точки некоторого функционала. Доказана теорема существования седловой точки.

Трехслойные панели с тонкими прочными композитными обшивками и легким заполнителем благодаря своим уникальным свойствам широко используются во многих отраслях техники. Главной особенностью таких конструкций является сочетание высокой изгибной жесткости и прочности с небольшой массой и хорошей способностью поглощать энергию при ударных воздействиях. Кроме того, трехслойные конструкции позволяют обеспечить хорошие звуко- и теплоизолирующие свойства [1], а также обладают высокой технологичностью и вибростойкостью. Это и определяет их широкое применение в аэрокосмической технике, судостроении, транспортном машиностроении, а также в строительстве.

В настоящей работе рассматривается физически нелинейная и геометрически линейная задача о равновесии трехслойной пластины, составленной из двух несущих слоев и расположенным между ними трансверсально-мягким заполнителем, связанным с несущими слоями клеевым соединением. Для описания напряженно-деформированного состояния в несущих слоях используются уравнения линейной модели Кирхгофа–Лява, в заполнителе — уравнения теории упругости, упрощенные в рамках принятой модели трансверсально-мягкого слоя и проинтегрированных по толщине с удовлетворением условий сопряжения слоев по перемещениям в поперечном направлении. Кроме того, задача рассматривается при ограничении, соответствующем идеальной упруго-пластической модели для заполнителя. Обобщенная постановка задачи формулируется в виде задачи об отыскании седловой точки некоторого функционала. Отметим, что в работах [2-6] рассматривались задачи теории мягких оболочек, а также методы их решения. В [7] предлагается приближенный метод нахождения критической силы и формы прогиба стержня, сжатого осевой силой и имеющего начальный прогиб, в [8] проведено численное решение геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной оболочки.

Пусть a — длина пластины, $2h$, $2h_{(k)}$ — толщины заполнителя и k-го слоя соответственно (здесь и всюду в дальнейшем предполагаем, что $k = 1, 2$), $X^1_{(k)}$, $X^3_{(k)}$ — компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k-го слоя, $w^{(k)}$ и $u^{(k)}$ — прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k-го слоя соответственно, $T^{11}_{(k)}$, $M^{11}_{(k)}$ — мембранные усилия и внутренние изгибающие моменты в k-м слое соответственно, $H_{(k)} = h + h_{(k)}$. Края несущих слоев пластины предполагаем жестко закрепленными, так что выполняются условия $u^{(k)}(x) = 0$, $w^{(k)}(x) = 0$, $dw^{(k)}/dx(x) = 0$ при $x = 0$, $x = a$. Задача рассматривается в геометрически линейной постановке, то есть предполагаем, что $T^{11}_{(k)} = B_{(k)} du^{(k)}/dx$, $M^{11}_{(k)} = D_{(k)} d^2w^{(k)}/dx^2$, где $B_{(k)} = 2\,h_{(k)}\,E^{(k)}/(1 - \nu^{(k)}_{12}\,\nu^{(k)}_{21})$ — жесткость k-го слоя на растяжение–сжатие, $E^{(k)}$ и $\nu^{(k)}_{12}$, $\nu^{(k)}_{21}$ — модуль упругости первого рода и коэффициенты Пуассона материала k-го несущего слоя, $D_{(k)} = B_{(k)}\,h^2_{(k)}/3$ — изгибная жесткость k-го слоя. Обозначим через $U = \left(w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}\right)$ вектор перемещений точек срединной поверхности k-го слоя. Введем в рассмотрение функционалы

$$\Phi_k(U) = \frac{1}{2}\int\limits_0^a \left[B_{(k)} \left(\frac{du^{(k)}}{dx} \right)^2 + D_{(k)} \left(\frac{d^2w^{(k)}}{dx^2} \right)^2 \right] dx -$$

$$- \int\limits_0^a \left(X^1_{(k)}\,u^{(k)} + X^3_{(k)}\,w^{(k)} + M^1_{(k)}\,\frac{dw^{(k)}}{dx} \right) dx, \qquad k = 1, 2,$$

$$\Phi_0(U) = \frac{1}{2}\int\limits_0^a c_3 \left(w^{(2)} - w^{(1)} \right)^2 dx, \ \Phi_3(U, q^1) = \int\limits_0^a \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)}\,\frac{dw^{(k)}}{dx} + \left(u^{(2)} - u^{(1)} \right) \right] q^1 dx,$$

$$\Phi_4(q^1) = \frac{1}{2}\int\limits_0^a \left[\frac{2h}{G_{13}}\,\left(q^1\right)^2 + \frac{h^3}{3\,E_3}\,\left(\frac{dq^1}{dx} \right)^2 \right] dx\,,$$

где $M^1_{(k)}$ — поверхностный момент внешних сил, приведенный к срединной поверхности k-го слоя, G_{13}, E_3 — модули поперечного сдвига и обжатия заполнителя, $c_3 = E_3/(2h)$. Для q^1 предполагаем выполнеными граничные условия $q^1(0) = q^1(a) = 0$. Считая, что зависимость между касательным напряжением q^1 и деформацией поперечного сдвига соответствует идеальной упруго-пластической модели, задачу рассмотрим при ограничении $\left| q^1(x) \right| \leqslant q^1_*$, $0 < x < a$, где q^1_* — заданное предельное значение напряжения в заполнителе. Это условие означает недопущение разрушения конструкции. Обозначим через $V_k = \overset{\circ}{W}{}^{(k)}_2(0, a)$ – пространства Соболева, положим $K = \{q^1 \in V_1 : \left| q^1(x) \right| \leqslant q^1_*, 0 < x < a\}$, $V = V_2 \times V_2 \times V_1 \times V_1$. Введем в рассмотрение функционал $L : V \times V_1 \to R_1$ по формуле $L(U, q^1) = \Phi_0(U) + \Phi_1(U) + \Phi_2(U) + \Phi_3(U, q^1) - \Phi_4(q^1)$. Под обобщенным решением задачи будем понимать такую функцию $(\widehat{U}, \widehat{q}^1) \in V \times K$, что [9–11]

$$L(\widehat{U}, \widehat{q}^1) = \inf_{U \in V}\ \sup_{q^1 \in K} L(U, q^1). \tag{1}$$

Справедливы следующие результаты.

Л е м м а 1. *Функционалы* Φ_j, $j = 1, 2, 4$, *являются строго выпуклыми, функционал* Φ_0 *– выпуклым.*

Л е м м а 2. *Функционалы* Φ_j , $j = 0, 1, 2, 3, 4$, *являются слабо полунепрерывными снизу.*

Л е м м а 3. *Функционалы* $\Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2$, Φ_4 *являются коэрцитивными.*

Л е м м а 4. *Множество* K *является выпуклым, слабо замкнутоым.*

Из лемм 1–4 вытекает, что имеет место

Т е о р е м а 1. *Задача* (1) *имеет единственное решение.*

Доказательство теоремы проводится на основе общих результатов о существовании седловых точек (см., например, [12]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н.* О взаимодействии композитной пластины, имеющей вибропоглощающее покрытие, с падающей звуковой волной // Известия ВУЗов. Математика. 2015. № 3. С. 75–82.

2. *Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А.* Обобщенная постановка задачи о равновесии мягкой биологической оболочки // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2447–2449.

3. *Badriev I.B., Zadvornov O.A., Saddek A.M.* Convergence analysis of iterative methods for some variational inequalities with pseudomonotone operators // Differential Equations. 2001. Т. 37. № 7. С. 934–942.

4. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 8. С. 1115–1122.

5. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Исследование разрешимости осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения // Известия высших учебных заведений. Математика. 2005. № 1. С. 25-30.

6. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Исследование сходимости итерационного процесса для уравнений с вырождающимися операторами // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. № 7. С. 898–901.

7. *Шарафутдинова Г.Г.* Приближенные методы решения задачи о формах потери устойчивости стержня, имеющего начальный прогиб // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2743–2745.

8. *Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Макаров М.В., Паймушин В.Н.* Численное решение задачи о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в геометрически нелинейной постановке // Вестник Казанского технологического университета. 2014. Т. 17. № 23. С. 393–396.

9. *Паймушин В.Н.* Теория устойчивости трехслойных пластин и оболочек (этапы развития, современное состояние и направления дальнейших исследований) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2001. № 2. С. 148–162.

10. *Paimushin V.N.* Nonlinear theory of the central bending of three-layer shells with defects in the form of sections of bonding failure // Soviet Applied Mechanics. 1987. V. 23. № 11. P. 1038–1043.

11. *Paimushin V.N., Bobrov S.N.* Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms // Mechanics of composite materials. 2000. V. 36. № 1. P. 59–66.

12. *Ekeland I., Temam R.* Convex Analysis and Variational Problems. Amsterdam: North-Holland, 1976. 402 p.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена за счёт средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности и при финансовой поддержке РФФИ (проекты 14-01-00755, 15-41-02569, 15-38-21099).

Поступила в редакцию 5 мая 2015 г.

Badriev I.B., Banderov V.V., Garipova G.Z., Makarov M.V. ON THE SOLVABILITY OF A NONLINEAR EQUILIBRIUM PROBLEM FOR SANDWICH PLATES

A one-dimensional geometrically linear problem of determining the stress-strain state of the sandwich plate with a transversely soft filler in the presence of constraints on the level of formed in the filler the transverse shear stresses is considered. The generalized statement is formulated as a problem of determining a saddle point of some functional. Existence theorem of a saddle point is proved.

Key words: sandwich plate, saddle point, transversely soft filler existence theorem.

Бадриев Ильдар Бурханович, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, e-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

Badriev Ildar Burkhanovich, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Computing Mathematics Department, e-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

Бандеров Виктор Викторович, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, заместитель директора Института вычислительной математики и технологий, e-mail: Victor.Banderov@kpfu.ru

Banderov Viktor Viktorovich, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Deputy Director of the Institute of Computer Mathematics and Information Technologies, e-mail: Victor.Banderov@kpfu.ru

Гарипова Гульназ Зуфаровна, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, студент, e-mail: gulnazgarif@gmail.com

Garipova Gulnaz Zufarovna, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Student, e-mail: gulnazgarif@gmail.com

Макаров Максим Викторович, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева (КНИТУ-КАИ), г. Казань, Российская Федерация, аспирант кафедры прочности конструкций, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, младший научный сотрудник, e-mail: makarovmaksim@mail.ru

Makarov Maksim Viktorovich, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Junior Researcher, e-mail: makarovmaksim@mail.ru

УДК 517.958

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ И КВАЗИВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ ТЕОРИИ МЯГКИХ СЕТЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК

© И. Б. Бадриев, В. В. Бандеров, Н. В. Калачева

Ключевые слова: мягкая оболочка; вариационное неравенство; квазивариационное неравенство; теорема существования; итерационный метод; теорема сходимости.

Рассмотрены задачи о напряженно-деформированном состоянии мягких оболочек, находящихся под воздействием массовой и поверхностной нагрузки. Допускается также, что оболочка может быть ограничена в перемещении препятствием. Обобщенные постановки сформулированы в виде вариационных и квазивариационных неравенств. Исследована разрешимость задач. Для решения вариационных и квазивариационных неравенств с операторами монотонного типа в банаховых и гильбертовых пространствах рассматриваются итерационные методы. Исследована сходимость методов. Рассмотрены особенности применения предложенных итерационных методов к задачам теории мягких сетчатых оболочек.

Рассматриваются задачи об определении положения равновесия мягких (не воспринимающих сжимающих усилий) оболочек [1-4], закрепленных по краям, находящихся под воздействием массовой и поверхностной нагрузки, для плоского (бесконечно длинная цилиндрическая оболочка) случая. Деформации и перемещения оболочек допускаются конечными.