We investigate unimprovable sufficient conditions of stability for linear scalar nonautonomous differential equations with retarded argument and nonnegative coefficient, in the form of the integral estimate of the coefficient along an interval of determined length.

Key words: differential equation; delay; stability; effective conditions; sharp conditions.

Чудинов Кирилл Михайлович, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: cyril@list.ru

Chudinov Kirill Mikhailovich, Perm National Research Polytechnical University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, e-mail: cyril@list.ru

УДК 532.546

ОПТИМИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ДЛЯ РАДИАЛЬНО–СИММЕТРИЧНОГО СЛУЧАЯ

© **А.И. Шангараева, Д.В. Шевченко**

Ключевые слова: многофазная фильтрация; радиальная симметрия; численный метод; число Куранта; разностная схема.

Рассмотрен алгоритм ускорения численных расчетов уравнений переноса для радиально-симметричного случая с использованием явной схемы. Предлагаемый подход ускорения времени расчетов основан на идее введения кратных шагов по времени при условии согласования их с числом Куранта. Приведено описание свойств и этапов алгоритма. Применение предложенного нами алгоритма позволит достичь существенного ускорения времени расчетов. Построена также зависимость количества расчетных шагов от радиуса.

Введение

В работе решается задача ускорения численных расчетов по явной схеме для уравнений переноса, используемого при моделировании нефтяных месторождений [1, 2]. При расчете реальных месторождений необходимо использовать сетки с большим числом узлов, что приводит к значительному увеличения объема вычислений.

Как известно, при использовании явной схемы для ее устойчивости необходимо выполнение условия Куранта. Выполнение этого условия требует существенного увеличения объема вычислений. Нами предлагается модификация этого условия, позволяющая получить ускорение времени вычислений. Верификация предлагаемого метода ускорения подробно описана в работах [3, 4] для плоско-параллельного случая, для которого существует автомодельное решение. Там же предлагается использовать разные шаги по времени и их количество в разных областях месторождения так, чтобы с одной стороны, уменьшить объем вычислений, а с другой стороны, обеспечить устойчивость разностных схем.

Достижения этих целей предполагается достичь путем введения локального числа Куранта и введения для различных областей фильтрации различных временных шагов.

В данной работе описанный подход применяется для радиальной задачи с целью отследить движение фронта насыщенности. Проведено сравнение предложенного алгоритма с классическим подходом и с ускорением.

Отметим, что в работах [5, 6] изучались нелинейные задачи многофазной фильтрации, сводящиеся к задаче фильтрации с многозначным законом.

1. Постановка задачи

Рассматривается процесс плоскорадиальной фильтрации двухфазной жидкости в круговом пласте, в центре которого, совпадающего с началом координат, находится скважина радиуса r_w:

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, k\, \frac{\partial p}{\partial r}\right) = 0, \quad m\, \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}\left(r\, f\, k\, \frac{\partial p}{\partial r}\right) + \widetilde{\beta}_w\, \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad r_w < r < R_c\,, t > 0, \quad (1)$$

где s — насыщенность, p — давление, β — суммарная упругоемкость среды, $\widetilde{\beta}_w$ — эффективная упругоемкость системы, относящаяся к водной фазе, k — абсолютная проницаемость, k — общая проводимость двухфазной системы, m — пористость, $f = f(s, x)$ — функция Баклея–Леверетта или доля воды в потоке.

Уравнения (1) дополняются следующими начальными и граничными условиями. Давление и насыщенность заданы как в начальный момент времени, так и на границах скважины и области: $p(r_w) = p_*$, $p(R_c) = p^*$, $s(r_w) = s_*$, $s(R_c) = s^*$, $p(r, 0) = p_0(r)$, $s(r, 0) = s_0(r)$. Для численного решения вводится сетка $\omega_h = \{r_i = ih, i = 0, 1, \ldots, N_r; h = (R_c - r_w)/N_r\}$. Система (1) аппроксимируется разностной схемой

$$\beta_i \frac{p_i^{M+1} - p_i^M}{\tau_i} - \frac{1}{h^2 r_i}\left(r_{i+1/2} k_{i+1/2}\,(p_{i+1} - p_i) + r_{i-1/2} k_{i-1/2}\,(p_{i+1} - p_i)\right) = 0,$$

$$m_i \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau_i} - \frac{1}{h^2 r_i}\Big(r_{i+1/2} f_{i+1/2} k_{i+1/2}\,(p_{i+1} - p_i) +$$

$$+ r_{i-1/2} f_{i-1/2} k_{i-1/2}\,(p_{i+1} - p_i)\Big) + \widetilde{\beta}_i \frac{p_i^{M+1} - p_i^M}{\tau_i} = 0$$

Для этих разностных схем выведем условие Куранта [1]: $C_i = \overline{f}_i\, \overline{k}_i\,(p_{i+1} - p_i)\,\tau_i / \left(\overline{r}_i h^2 m_i\right) < 1$, где черта сверху означает, что соответствующее значение вычисляется в полуузле: $\overline{g}_i = g_{i+1/2}$.

Шаг по времени, получаемый с учетом условия Куранта в окрестности высокодебитных скважин, оказывается очень мелким, и, если временной шаг делать одинаковым для всех ячеек пространственной сетки, это приведет к резкому увеличению объема вычислений. Нами предложен следующий алгоритм, позволяющий ускорить проведения расчетов за счет зависимости числа шагов по времени.

Найдем шаг по времени из соотношения $\tau_i = C_i\, m_i\, h^2 \overline{r}_i / \left(\overline{f}_i \overline{k}_i\,(p_{i+1} - p_i)\right)$.

1. Для каждой ячейки выбирается шаг по времени, удовлетворяющий условию Куранта: $\tau_i = m_i\, h^2\, \overline{r}_i\, \min\left\{\overline{k}_i\,(p_{i+1} - p_i)\,;\, \overline{k}_{i-1}\,(p_{i+1} - p_i)\right\} / \overline{f}_i$.

2. Определяется наименьший шаг по времени по всем ячейкам $\tau_{min} = \min\limits_i \tau_i$.

3. Находится коэффициент увеличения шага для каждой ячейки $K_i = \tau_i / \tau_{min}$.

4. Все коэффициенты ячеек округляются в меньшую сторону до числа, составляющего целую степень числа два $(1, 2, 4, \ldots)$. Таким образом, определяется количество мелких шагов, на которых будет проведен один перерасчет для ячейки $NS_i = 2^{[\log_2 K_i]}$.

5. Согласно рассчитанному коэффициенту заново определяется шаг по времени для каждой ячейки $\widetilde{\tau}_i = N\, S_i\, \tau_{min}$.

При этом значение функции Баклея–Леверетта на каждой границе $f_{i+1/2}$ пересчитывается один раз за $\max\{N\, S_i, N\, S_{i+1}\}$ шагов.

Данный алгоритм позволяет ускорить время расчетов в 1.7 раза. Об этом свидетельствуют проведенные численные эксперименты.

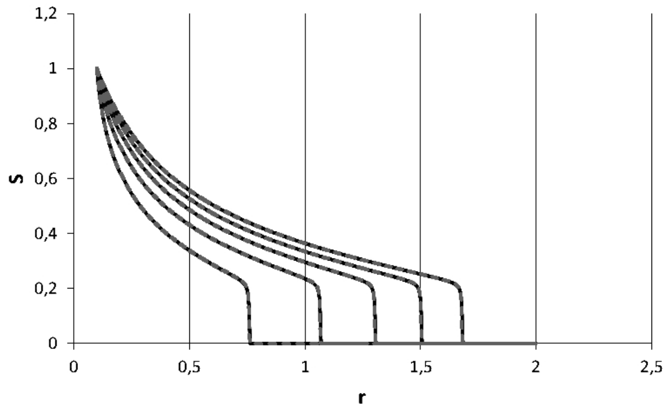

Рис. 1: Движение фронта насыщенности через равные шаги по времени в радиальном случае.

3. Численные эксперименты

На рис. 1 приведены графики, описывающие движение фронта насыщенности. Отметим, что движение фронта в случае использования предложенного алгоритма с ускорением совпадает с вариантом без ускорения.

Результаты свидетельствуют о целесообразности применения указанного в работе подхода. Численные решения в случаях применения классического явного метода и метода с ускорением совпадают с достаточной точностью.

Таким образом, установлено, что условие Куранта для шага по времени является слишком жестким для задач данного типа. Обоснована возможность увеличения шага по времени в несколько раз, что даёт существенную экономию ресурсов ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азиз Х., Сеттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982.

2. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1982.

3. *Шангараева А.И.* Анализ алгоритма ускорения расчета нефтенасыщенности в одномерном случае // Вестник Казанского технологического университета. 2014. Т. 17. № 14. С. 460–462.

4. *Шангараева А.И., Шевченко Д.В.* Исследование влияния локальной неоднородности фазовых проницаемостей на параметры разработки нефтяных месторождений // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2014. Т. 156. Кн. 4. С. 103–111.

5. *Бадриев И.Б.* Математическое моделирование стационарных задач подземной фильтрации с многозначным законом // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2444–2446.

6. *Бадриев И.Б., Фанюк Б.Я.* Математическое моделирование задач фильтрации с многозначным законом в многослойных пластах // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 5. С. 126–136.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02315).

Поступила в редакцию 5 июня 2015 г.

Shangaraeva A.I., Shevchenko D.V. OPTIMIZATION OF THE NUMERICAL SOLUTION OF TRANSPORT EQUATION FOR RADIALLY SYMMETRIC CASE

An algorithm for acceleration of numerical calculations of the transport equations for the radially symmetric case with the explicit scheme is considered. The proposed approach is the acceleration time calculation is based on the idea of introducing multiple time steps, subject to agreement with the number of the Courant. Description of the properties and steps of the algorithm is given. Application of the proposed algorithm will allow us to achieve a significant acceleration of computing time. Also, the dependence of the number of steps calculated by the radius is constructed.

Key words: multiphase filtration; radial symmetry; numerical method; the Courant number; the difference scheme.

Шангараева Алина Ильгизаровна, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, аспирант кафедры аэрогидромеханики, e-mail: linka390@mail.ru

Shangaraeva Alina Il'gizarovna, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Aerohydromechanics Department, e-mail: linka390@mail.ru

Шевченко Денис Вячеславович, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, доцент кафедры аэрогидромеханики; Институт экономики, управления и права, г. Казань, Российская Федерация, заведующий кафедрой высшей математики, кандидат физико-математических наук, профессор, e-mail: dv@ieml.ru

Shevchenko Denis Vyacheslavovich, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Aerohydromechanics Department, e-mail: dv@ieml.ru

УДК 517.91

СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НЕГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ МНОГОКРАТНОМ ВЫРОЖДЕНИИ

© И.В. Шарафутдинов

Ключевые слова: бифуркация Хопфа; негладкая система; многократное вырождение; периодические решения; устойчивость.

Предлагаются методы определения типа бифуркации и устойчивости установившихся колебательных режимов динамических систем с негладкой правой частью, имеющей при некотором значении параметра несколько пар чисто мнимых собственных значений.

Рассматривается динамическая система

$$x' = F(x,\lambda)\,, \quad x \in \mathbb{R}^N\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

где $F(0,\lambda) \equiv 0$, вектор-функция $F(x,\lambda)$ является гладкой по λ, а по переменной x её гладкость нарушается на некоторой $N-1$-мерной гиперплоскости $\Pi_0 = \{x: \ (x,b_0) = \alpha_0\}$, где $b_0 \in \mathbb{R}^N$ — некоторый ненулевой вектор и число $\alpha_0 \geqslant 0$. Пусть правая часть системы (1) представима в виде

$$F(x,\lambda) = \begin{cases} F_+(x,\lambda), \ (x,b_0) > \alpha_0, \\ F_0(x,\lambda), \ (x,b_0) = \alpha_0, \\ F_-(x,\lambda), \ (x,b_0) < \alpha_0, \end{cases}$$

где F_+ и F_- являются гладкими по переменной x в соответствующих полуокрестностях точки $x=0$.