УДК 514.7
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2068-2084

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИМАНОВЫХ ИНВАРИАНТОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ ПО ЗАДАННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЕ

© Ю. Г. Фомичева, А. А. Рудиченко

Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: fomichevajulia@mail.ru

В данной работе рассматривается вопрос о возможности восстановления в трехмерном евклидовом пространстве C^3 – регулярной поверхности, заданной явным уравнением $z=z(x,y)$ на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ по ее заданной отрицательной гауссовой кривизне. Решение этой задачи сводится к доказательству существования и единственности на $\mathbb{R}^2$ классического решения дифференциального уравнения Монжа–Ампера гиперболического типа. Сформулированы условия, обеспечивающие существование такого решения в целом.

Ключевые слова: восстановление поверхности; гауссова кривизна; гиперболическое уравнение Монжа–Ампера; задача Коши; римановы инварианты

Пусть на $\mathbb{R}^2$ задана дифференцируемая функция $f=f(x,y)<0$. Докажем, что в пространстве E^3 существует C^3 – регулярная поверхность Φ, заданная явным уравнением $z=z(x,y), (x,y)\in\mathbb{R}^2$, гауссова кривизна $K(x,y)$ которой совпадает с функцией $f=f(x,y)<0$.

Известно [1], что для поверхности $\Phi: z=z(x,y)$ гауссова кривизна $K(x,y)$ определяется формулой:

$$K(x,y)=\frac{z_{xx}z_{yy}-{z_{xy}}^2}{\left(1+z_x^2+z_y^2\right)^2}.$$

Поэтому рассматриваемая задача сводится к доказательству существования решения уравнения Монжа–Ампера

$$z_{xx}z_{yy}-{z_{xy}}^2-\left(1+z_x^2+z_y^2\right)^2 f(x,y)=0, \qquad (1)$$

где $f(x,y)$ – заданная функция, $f(x,y)<0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; $z=z(x,y)$ – неизвестная регулярная функция класса C^3; уравнение (1) x – гиперболично на решении $z(x,y)$, т. е.

$$\Delta^2(x,y,z,z_x,z_y)=-4f(x,y)\left(1+z_x^2+z_y^2\right)^2>0, \qquad z_{yy}\neq 0. \qquad (2)$$

Решение поставленной задачи сводится к доказательству существования решения уравнения (1) на всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

Получен следующий результат:

Т е о р е м а 1. *Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана функция $f(x,y)<0$, удовлетворяющая условиям:*

1) *функция $f(x,y)$ – дважды непрерывно дифференцируема по переменным x,y и C^1 – ограничена;*
2) *функция*

$$\Delta(x,y,z_x,z_y)=2\sqrt{-f(x,y)}\,\left(1+z_x^2+z_y^2\right) \qquad (3)$$

непрерывно дифференцируема по x,y,z_x,z_y;

$$|\Delta| \leq \mathrm{C}_1, \quad \frac{1}{\Delta} \leq \mathrm{C}_{2,} \quad \left|\frac{\partial\Delta}{\partial\omega}\right| \leq \mathrm{C}_1\ \eta\,(x)\,, \tag{4}$$

где $\omega = x, y, z_x, z_y$; $0 \leq C_1 \leq \frac{1}{2}$, $C_2 \geq 0$, $C_1, C_2 = const$; $\eta\,(x)$ *– некоторая положительная функция, удовлетворяющая условию*

$$4N_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \eta\,(x)\,dx \leq \frac{\delta-\varepsilon}{2}; \quad 0<\varepsilon<\delta, \quad \frac{\delta-\varepsilon}{2} < 1, \quad \varepsilon, \delta = const, \tag{5}$$

$$N_1 = \max\left\{\mathrm{C}_1, \frac{1}{2}\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\right\}. \tag{6}$$

Тогда в пространстве E^3 *существует единственная* C^3 *– регулярная поверхность* Φ, *заданная явным уравнением* $z = z\,(x, y)\,,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$, *с гауссовой кривизной* $K(x, y) = f(x, y) < 0$.

Для доказательства была использована техника, указанная в работе [2].

Прежде чем приступать к доказательству этой теоремы, докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Для неизвестной функции $z = z\,(x, y)$ зададим начальные условия на оси Oy:

$$z\,(0, y) = z^0\,(y)\,, \quad z_x\,(0, y) = p^0\,(y)\,, \tag{7}$$

такие, что

$$z^0\,(y) \in \mathrm{C}^3, \quad p^0\,(y) \in \mathrm{C}^2, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

и на оси Oy выполняются условия $x-$ гиперболичности:

$$\Delta^2\left(0, y, z^0(y), p^0(y), (z^0)'(y)\right) > 0, \quad (z^0)''(y) \neq 0, y \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) с начальными данными (7):

$$\begin{cases} z_{xx}z_{yy} - {z_{xy}}^2 - \left(1 + z_x^2 + z_y^2\right)^2 f\,(x, y) = 0, \\ z\,(0, y) = z^0\,(y)\,, z_x\,(0, y) = p^0\,(y)\,,\ y \in\ \mathbb{R}, \end{cases} \tag{10}$$

Известно [3], что задача (10) сводится к задаче Коши для системы пяти уравнений в римановых инвариантах, C^1 – решению которой соответствует C^3 – решение задачи (10):

$$\begin{cases} r_x + sr_y = \dfrac{f_x}{4f}r - \dfrac{f_x}{4f}s - \dfrac{f_y}{4f}rs + r^2\dfrac{f_y}{4f} + \sqrt{-f}pr^2 - \sqrt{-f}qr - \sqrt{-f}prs + \sqrt{-f}qs \\ s_x + rs_y = -\dfrac{f_x}{4f}r + \dfrac{f_x}{4f}s + \dfrac{f_y}{4f}rs - s\dfrac{f_y}{4f} - \sqrt{-f}ps^2 - \sqrt{-f}qr + \sqrt{-f}prs + \sqrt{-f}qs \\ p_x + sp_y = s\dfrac{\Delta}{2} \\ q_x + rq_y = \dfrac{\Delta}{2} \\ z_x + rz_y = p + rq \end{cases} \tag{11}$$

Искомыми функциями в этой системе являются функции

$$z = z\,(x, y)\,, \quad p = z_x, \quad q = z_y, \quad r = \frac{\Delta - 2z_{xy}}{2z_{yy}}, s = \frac{-\Delta - 2z_{xy}}{2z_{yy}}, \quad z_{yy} \neq 0 \tag{12}$$

(римановы инварианты).

Характеристическое уравнение для уравнения (1) имеет вид:

$$z_{yy}\dot{y}^2 + 2z_{xy}\dot{x}\ \dot{y}\ + z_{xx}\dot{x}^{\ 2} = 0. \tag{13}$$

Отсюда, с учетом (1), (3), получим:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-z_{xy} \pm \sqrt{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}{}^2}}{z_{yy}} = \frac{-z_{xy} \pm \left(1 + z_x^2 + z_y^2\right)\sqrt{-f\left(x,y\right)}}{z_{yy}} = \frac{-2z_{xy} \pm \Delta}{2z_{yy}}.$$

Принимая во внимание (12), имеем:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-2z_{xy} - \Delta}{2z_{yy}} = s; \qquad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-2z_{xy} + \Delta}{2z_{yy}} = \ r. \tag{14}$$

Из (14) видно, что функции r и s есть угловые коэффициенты характеристик уравнения (1): $\begin{cases} x = x(\tau) \\ y = y(\tau) \end{cases}$, где τ – некоторый параметр.

Кроме того, уравнение (13) является дифференциальным уравнением асимптотических линий поверхности $\Phi : z = z\left(x,y\right)$. Следовательно, характеристики уравнения (1) совпадают с асимптотическими линиями поверхности Φ. Поэтому r и s есть угловые коэффициенты асимптотических линий поверхности Φ.

Задача о восстановлении поверхности $\Phi : z = z\left(x,y\right)$ по заданной отрицательной гауссовой кривизне будет решена, если будет найдено гладкое решение $\{r,s,p,q,z\}$ системы (11), удовлетворяющее условию $z_{yy} \neq 0$.

Система (11) представляет собой слабо-нелинейную систему квазилинейных уравнений. Б. Л. Рождественский [4] доказал, что для слабо-нелинейной системы квазилинейных уравнений задача Коши разрешима для любых начальных данных в любой конечной полосе, если априори известно, что система гиперболическая в узком смысле и ее решение ограничено.

Начальные условия для системы (11) следуют из соотношений (12) и начальных условий (7):

$$\begin{gathered} r\left(0,y\right) = r^0\left(y\right) = \frac{\Delta\left(0,y,z^0\left(y\right),p^0\left(y\right),z_y^0\left(y\right)\right) - 2p_y^0\left(y\right)}{2z_{yy}^0(y)}, \\ s\left(0,y\right) = s^0\left(y\right) = \frac{-\Delta\left(0,y,z^0\left(y\right),p^0\left(y\right),z_y^0\left(y\right)\right) - 2p_y^0\left(y\right)}{2z_{yy}^0\left(y\right)}, \\ p\left(0,y\right) = p^0\left(y\right), \quad q\left(0,y\right) = q^0\left(y\right) = z_y^0\left(y\right), \quad z\left(0,y\right) = z^0\left(y\right). \end{gathered} \tag{15}$$

Будем строить C^1 – решение задачи (11), (15) в полуплоскости $x \geq 0$. Построение решения в полуплоскости $x \leq 0$ проводится аналогично.

Систему (11) перепишем в более компактной записи:

$$\begin{cases} r_x + sr_y = F^r\left(x,y,r,s,p,q\right); \\ s_x + rs_y = F^s\left(x,y,r.s.p,q\right); \\ p_x + sp_y = F^p\left(x,y,s,p,q\right); \\ q_x + rq_y = F^q\left(x,y,p,q\right); \\ z_x + rz_y = F^z\left(x,y,\ r,p,q\right), \end{cases} \tag{16}$$

где

$$
\begin{aligned}
&F^r(x,y,r,s,p,q)=\frac{f_x}{4f}r-\frac{f_x}{4f}s-\frac{f_y}{4f}rs+r^2\frac{f_y}{4f}+\sqrt{-f}pr^2-\sqrt{-f}qr-\sqrt{-f}prs+\sqrt{-f}qs;\\
&F^s(x,y,r.s,p,q)=-\frac{f_x}{4f}r+\frac{f_x}{4f}s+\frac{f_y}{4f}rs-s\frac{f_y}{4f}-\sqrt{-f}ps^2-\sqrt{-f}qr+\sqrt{-f}prs+\sqrt{-f}qs;\\
&F^p(x,y,s,p,q)=\ s\frac{\Delta}{2};\\
&F^q(x,y,p,q)=\frac{\Delta}{2};\\
&F^z(x,y,r,p,q)=p+rq.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Характеристиками системы (16) являются интегральные кривые дифференциальных уравнений: $\dfrac{dy}{dx}=r(x,y)$, $\dfrac{dy}{dx}=s(x,y)$.

Проинтегрировав уравнения системы (16) вдоль характеристик с учетом начальных значений (15) получим систему интегральных уравнений:

$$
\left\{
\begin{aligned}
r(x,y)&=r^0(g_s(0,x,y))+\int\limits_0^x F^r(x,y,r,s,p,q)(\tau,g_s(\tau,x,y))\,d\tau;\\
s(x,y)&=s^0(g_r(0,x,y))+\int\limits_0^x F^s(x,y,r,s,p,q)(\tau,g_r(\tau,x,y))\,d\tau;\\
p(x,y)&=p^0(g_s(0,x,y))+\int\limits_0^x F^p(x,y,s,p,q)(\tau,g_s(\tau,x,y))\,d\tau;\\
q(x,y)&=q^0(g_r(0,x,y))+\int\limits_0^x F^q(x,y,p,q)(\tau,g_r(\tau,x,y))\,d\tau;\\
z(x,y)&=z^0(g_r(0,x,y))+\int\limits_0^x F^z(x,y,r,p,q)(\tau,g_r(\tau,x,y))\,d\tau,
\end{aligned}
\right.
\tag{18}
$$

где $y=g_r(\tau,x,y)$ – функция, являющаяся решением задачи Коши

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial g_r}{\partial\tau}=r(\tau,g_r(\tau,x,y)),\\
g_r(x,x,y)=y,
\end{array}
\right.
$$

т. е. одна из двух характеристик системы (16), проходящих через точку $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; $y=g_s(\tau,x,y)$ – функция, являющаяся решением задачи Коши

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial g_s}{\partial\tau}=s(\tau,g_s(\tau,x,y)),\\
g_s(x,x,y)=y,
\end{array}
\right.
$$

т. е. вторая из двух характеристик системы (16), проходящих через точку $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Решение задачи (16), (15) будем строить методом последовательных приближений, приняв за начальное приближение

$$r^0(y), \quad s^0(y), \quad p^0(y), \quad q^0(y)=z_y^0(y), \quad z^0(y).$$

Пусть построено приближение $\overset{n}{r}(x,y)$, $\overset{n}{s}(x,y)$, $\overset{n}{p}(x,y)$, $\overset{n}{q}(x,y)$, $\overset{n}{z}(x,y)$. Определим функции $\overset{n+1}{r}(x,y)$, $\overset{n+1}{s}(x,y)$, $\overset{n+1}{p}(x,y)$, $\overset{n+1}{q}(x,y)$, $\overset{n+1}{z}(x,y)$ как решение задачи Коши для линейной системы

$$\begin{cases} \overset{n+1}{r_x}+\overset{n}{s}\,\overset{n+1}{r_y}=F^r(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q}) \\ \overset{n+1}{s_x}+\overset{n}{r}\,\overset{n+1}{s_y}=F^s(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q}) \\ \overset{n+1}{p_x}+\overset{n}{s}\,\overset{n+1}{p_y}=F^p(x,y,\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q}) \\ \overset{n+1}{q_x}+\overset{n}{r}\,\overset{n+1}{q_y}=F^q(x,y,\overset{n}{p},\overset{n}{q}) \\ \overset{n+1}{z_x}+\overset{n}{r}\,\overset{n+1}{z_y}=F^z(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{p},\overset{n}{q}) \end{cases}, \tag{19}$$

с начальными условиями

$$\overset{n+1}{r}(0,y)=r^0(y), \overset{n+1}{s}(0,y)=s^0(y), \overset{n+1}{p}(0,y)=p^0(y), \overset{n+1}{q}(0,y)=q^0(y), \overset{n+1}{z}(0,y)=z^0(y).$$

Интегрируя систему (19) вдоль соответствующих характеристик получим:

$$\begin{cases} \overset{n+1}{r}(x,y)=\int\limits_0^x F^r(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})(\tau,\overset{n}{g}_s(\tau;x,y))d\tau+r^0(\overset{n}{g}_s(0;x,y)) \\ \overset{n+1}{s}(x,y)=\int\limits_0^x F^s(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})(\tau,\overset{n}{g}_r(\tau;x,y))d\tau+s^0(\overset{n}{g}_r(0;x,y)) \\ \overset{n+1}{p}(x,y)=\int\limits_0^x F^p(x,y,\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})(\tau,\overset{n}{g}_s(\tau;x,y))d\tau+p^0(\overset{n}{g}_s(0;x,y)) \\ \overset{n+1}{q}(x,y)=\int\limits_0^x F^q(x,y,\overset{n}{p},\overset{n}{q})(\tau,\overset{n}{g}_r(\tau;x,y))d\tau+q^0(\overset{n}{g}_r(0;x,y)) \\ \overset{n+1}{z}(x,y)=\int\limits_0^x F^z(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{p},\overset{n}{q})(\tau,\overset{n}{g}_r(\tau;x,y))d\tau+z^0(\overset{n}{g}_r(0;x,y)) \end{cases} \tag{20}$$

C^1 – решение задачи (11), (15) существует, если существуют непрерывные функции r, s, p, q, z, r_y, s_y, p_y, q_y, z_y, т. к. согласно (11) r_x, s_x, p_x, q_x, z_x выражаются через r, s, p, q, z, r_y, s_y, p_y, q_y, z_y. Доказательство существования непрерывных функций r, s, p, q, z, r_y, s_y, p_y, q_y, z_y сводится к доказательству равномерной сходимости последовательностей $\left\{\overset{n}{r}\right\}$, $\left\{\overset{n}{s}\right\}$, $\left\{\overset{n}{p}\right\}$, $\left\{\overset{n}{q}\right\}$, $\left\{\overset{n}{z}\right\}$, $\left\{\overset{n}{r_y}\right\}$, $\left\{\overset{n}{s_y}\right\}$, $\left\{\overset{n}{p_y}\right\}$, $\left\{\overset{n}{q_y}\right\}$, $\left\{\overset{n}{z_y}\right\}$. При этом решающую роль играет равномерная ограниченность этих последовательностей.

Пусть функции Δ, $\frac{1}{\Delta}$, r^0, s^0, p^0, q^0 C^1 – ограничены. Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = \max_{\omega=r,s}\left\{\sup_{y\epsilon\mathbb{R}}\left|r^0\left(y\right)\right|, \sup_{y\epsilon\mathbb{R}}\left|s^0\left(y\right)\right|\right\};\\
&\alpha_1(x) = \max\left\{\sup_{y\epsilon\mathbb{R}}\left|\frac{f_x}{4f}\right|, \sup_{y\epsilon\mathbb{R}}\left|\frac{f_y}{4f}\right|\right\};\\
&\alpha_2(x) = \sup_{y\epsilon\mathbb{R}}\left|\sqrt{-f}\right|;\\
&\alpha_3\left(x\right) = \sup_{y\epsilon\mathbb{R}}\left|\frac{\Delta}{2}\right|.
\end{aligned} \tag{21}$$

Л е м м а 1. *Пусть*

$$\left|p^0\right| \le 1, \quad \left|q^0\right| \le 1, \quad \left|z^0\right| \le 1, \quad \alpha_0 + 4\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha_1\left(x\right)dx + 4\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+|x|\right)\alpha_2\left(x\right)dx \le 1, \quad 2\alpha_3 \le 1. \tag{22}$$

Тогда для $\forall\left(x,y\right)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}$, $n=0,1,2,\ldots$ *справедливы неравенства:*

$$\left|\overset{n}{r}\left(x,y\right)\right| \le 1, \quad \left|\overset{n}{s}\left(x,y\right)\right| \le 1, \quad \left|\overset{n}{p}\left(x,y\right)\right| \le 1+x, \quad \left|\overset{n}{q}\left(x,y\right)\right| \le 1+x, \quad \left|\overset{n}{z}\left(x,y\right)\right| \le 1+2x+x^2 \tag{23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем лемму 1 методом индукции по n. Из соотношений (22) и начальных значений $\overset{n+1}{r}(0,y)=r^0(y)$, $\overset{n+1}{s}(0,y)=s^0(y)$, $\overset{n+1}{p}(0,y)=p^0(y)$, $\overset{n+1}{q}(0,y)=q^0(y)$, $\overset{n+1}{z}(0,y)=z^0(y)$ следует, что для $n=0$ неравенства (23) верны. Предположим, что неравенства (23) выполнены для некоторого номера n, и докажем их для номера $n+1$.

Из (20) имеем

$$\left|\overset{n+1}{r}(x,y)\right| \le \int_0^x \left|F^r(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})\right|(\tau,\overset{n}{g}_s(\tau;x,y))d\tau + \left|r^0(\overset{n}{g}_s(0;x,y))\right| \le$$

$$\le \alpha_0 + 4\int_0^{+\infty}\alpha_1(\tau)d\tau + 4\int_0^{+\infty}(1+\tau)\alpha_2(\tau)d\tau \le 1;$$

$$\left|\overset{n+1}{s}(x,y)\right| \le \int_0^x \left|F^s(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})\right|(\tau,\overset{n}{g}_r(\tau;x,y))d\tau + \left|s^0(\overset{n}{g}_r(0;x,y))\right| \le$$

$$\le \alpha_0 + 4\int_0^{+\infty}\alpha_1(\tau)d\tau + 4\int_0^{+\infty}(1+\tau)\alpha_2(\tau)d\tau \le 1;$$

$$\left|\overset{n+1}{p}(x,y)\right| \le \int_0^x \left|F^p(x,y,\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})\right|((\tau,\overset{n}{g}_s(\tau;x,y))d\tau + \left|p^0(\overset{n}{g}_s(0;x,y))\right| \le 1 + 2\alpha_3\int_0^x d\tau \le 1+x;$$

$$\left|\overset{n+1}{q}(x,y)\right| \le \int\limits_0^x \left|F^q(x,y,\overset{n}{p},\overset{n}{q})\right|(\tau,\overset{n}{g}_r(\tau;x,y))d\tau + \left|q^0(\overset{n}{g}_r(0;x,y))\right| \le 1+2\alpha_3\int\limits_0^x d\tau \le 1+x;$$

$$\left|\overset{n+1}{z}(x,y)\right| \le \int\limits_0^x \left|F^z(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{p},\overset{n}{q})\right|((\tau,\overset{n}{g}_r(\tau;x,y))d\tau + \left|r^0(\overset{n}{g}_r(0;x,y))\right| \le$$

$$\le 1+\int\limits_0^x 2(1+\tau)d\tau = 1+2x+x^2.$$

□

Л е м м а 2. *При выполнении условий* (22) *семейства* $\left\{\overset{n}{r}\right\}$, $\left\{\overset{n}{s}\right\}$, $\left\{\overset{n}{p}\right\}$, $\left\{\overset{n}{q}\right\}$, $\left\{\overset{n}{z}\right\}$ *равномерно ограничены на компакте*

$$G(\overline{x},\ \overline{y}) = \{(x,y)|x\in[0,\overline{x}],y\in[\overline{y}-\overline{x}+x,\overline{y}+\overline{x}-x]\} \tag{24}$$

для $\forall(\overline{x},\ \overline{y})\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функции $\overset{n}{r}(x,y)$, $\overset{n}{s}(x,y)$, $\overset{n}{p}(x,y)$, $\overset{n}{q}(x,y)$, $\overset{n}{z}(x,y)$ определены на компакте $G(\overline{x},\overline{y})$, поскольку характеристики, выходящие из любой точки $(x,y)\in G(\overline{x},\overline{y})$, лежат в компакте $G(\overline{x},\overline{y})$ в силу того, что $\left|\overset{n}{r}\right|\le 1$, $\left|\overset{n}{s}\right|\le 1$.

Равномерная ограниченность следует из неравенств (23). □

Потребуем, чтобы начальные данные r^0, s^0 были разделены постоянной, т. е. пусть существует $\delta = const > 0$ такое, что

$$\inf_{y\in R} r^0(y) - \sup_{y\in R} s^0(y) \ge \delta > 0. \tag{25}$$

Л е м м а 3. *Пусть существует* $\varepsilon\in(0,\delta]$, *такое, что*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\alpha_1(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)\alpha_2(x)dx \le \frac{\delta-\varepsilon}{8}. \tag{26}$$

Тогда для $n=0,1,2,\dots$

$$\inf_{(x,y)\in R^2}\overset{n}{r}(x,y) - \sup_{(x,y)\in R^2}\overset{n}{s}(x,y) \ge \varepsilon > 0. \tag{27}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (18) с учетом (21) и оценок (23), (26), имеем

$$\overset{n+1}{r}(x,y) \ge \inf_{y\in R} r^0(y) - (4\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\alpha_1(x)dx + 4\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)\alpha_2(x)dx) \ge \inf_{y\in R} r^0(y) - \frac{\delta-\varepsilon}{2},$$

$$\overset{n+1}{s}(x,y) \le \sup_{y\in R} s^0(y) - (4\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\alpha_1(x)dx + 4\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)\alpha_2(x)dx) \le \sup_{y\in R} s^0(y) + \frac{\delta-\varepsilon}{2}.$$

Тогда, учитывая условие (25), получим

$$\inf_{(x,y)\in R^2}\overset{n+1}{r}(x,y) - \sup_{(x,y)\in R^2}\overset{n+1}{s}(x,y) \ge \inf_{y\in R} r^0(y) - \frac{\delta-\varepsilon}{2} - \sup_{y\in R} s^0(y) - \frac{\delta-\varepsilon}{2} =$$

$$= \inf_{y\in R} r^0(y) - \sup_{y\in R} s^0(y) - (\delta-\varepsilon) \ge \delta-\delta+\varepsilon = \varepsilon.\square$$

В [4, с. 88], доказано, что производные точного решения слабо-нелинейной системы квазилинейных уравнений гиперболического типа остаются ограниченными при любом значении y, если ограниченным остается само решение. В работе [2] это утверждение распространено на метод последовательных приближений для системы пяти уравнений с двумя различными характеристиками. Аналогичное утверждение имеет место для последовательностей $\left\{\overset{n}{r}_y(x,y)\right\}$, $\left\{\overset{n}{s}_y(x,y)\right\}$, $\left\{\overset{n}{p}_y(x,y)\right\}$, $\left\{\overset{n}{q}_y(x,y)\right\}$, $\left\{\overset{n}{z}_y(x,y)\right\}$.

Л е м м а 4. *Последовательности производных* $\left\{\overset{n}{r}_y(x,y)\right\}$, $\left\{\overset{n}{s}_y(x,y)\right\}$, $\left\{\overset{n}{p}_y(x,y)\right\}$, $\left\{\overset{n}{q}_y(x,y)\right\}$, $\left\{\overset{n}{z}_y(x,y)\right\}$ *равномерно ограничены на компакте* $G(\overline{x},\overline{y})$, *определённом условием* (24), $\forall(\overline{x},\overline{y})\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}$, *т. е. существует функция* $F(x)\in C^0(\mathbb{R})$, *такая что* $\left|\overset{n}{r}_y(x,y)\right|\le F(x)$, $\left|\overset{n}{s}_y(x,y)\right|\le F(x)$, $\left|\overset{n}{p}_y(x,y)\right|\le F(x)$, $\left|\overset{n}{q}_y(x,y)\right|\le F(x)$, $\left|\overset{n}{z}_y(x,y)\right|\le F(x)$ *для* $\forall(x,y)\in G(\overline{x},\overline{y})$, $n=0,1,2,\ldots$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\overset{n}{g}_r(x,y_0)=\overset{n}{g}_r(x,0,y)$; $\overset{n}{g}_s(x,y_0)=\overset{n}{g}_s(x,0,y)$. Функция $y=\overset{n}{g}_r(x,y_0)$ есть решение задачи Коши

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\,\overset{n}{g}_r(x,y_0)}{\partial x}=\overset{n}{r}(x,\overset{n}{g}_r)\\ \overset{n}{g}_r(0,y_0)=y_0\end{array}\right., \tag{28}$$

т. е. кривая, заданная уравнением $y=\overset{n}{g}_r(x,y_0)$, есть одна из характеристик, проходящих через точку $(0;y_0)$.

Функция $y=\overset{n}{g}_s(x,y_0)$ есть решение задачи Коши

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\,\overset{n}{g}_s(x,y_0)}{\partial x}=\overset{n}{s}(x,\overset{n}{g}_r)\\ \overset{n}{g}_s(0,y_0)=y_0\end{array}\right., \tag{29}$$

т. е. кривая, заданная уравнением $y=\overset{n}{g}_s(x,y_0)$, есть вторая характеристика, проходящая через точку $(0;y_0)$.

Пусть

$$\begin{gathered}\overset{n+1}{\overline{r}}(x,y_0)=\overset{n+1}{r}(x,\overset{n}{g}_s(x,y_0));\ \overset{n+1}{\overline{s}}(x,y_0)=\overset{n+1}{s}(x,\overset{n}{g}_r(x,y_0));\\ \overset{n+1}{\overline{p}}(x,y_0)=\overset{n+1}{p}(x,\overset{n}{g}_s(x,y_0));\ \overset{n+1}{\overline{q}}(x,y_0)=\overset{n+1}{q}(x,\overset{n}{g}_r(x,y_0));\ \overset{n+1}{\overline{z}}(x,y_0)=\overset{n+1}{z}(x,\overset{n}{g}_r(x,y_0)).\end{gathered} \tag{30}$$

Формулы (18) принимают вид:

$$\begin{cases} \overset{n+1}{\overline{r}}(x,y_0)=\int\limits_0^x F^r(\tau,\overset{n}{g_s}(\tau;y_0),\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})(\tau,\overset{n}{g_s}(\tau;y_0))d\tau+r^0(y_0) \\ \overset{n+1}{\overline{s}}(x,y_0)=\int\limits_0^x F^s(\tau,\overset{n}{g_r}(\tau;y_0),\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})(\tau,\overset{n}{g_r}(\tau;y_0))d\tau+s^0(y_0) \\ \overset{n+1}{\overline{p}}(x,y_0)=\int\limits_0^x F^p(\tau,\overset{n}{g_s}(\tau;y_0),\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})(\tau,\overset{n}{g_s}(\tau;y_0))d\tau+p^0(y_0) \\ \overset{n+1}{\overline{q}}(x,y_0)=\int\limits_0^x F^q(\tau,\overset{n}{g_r}(\tau;y_0),\overset{n}{p},\overset{n}{q})(\tau,\overset{n}{g_r}(\tau,y_0))d\tau+q^0(y_0) \\ \overset{n+1}{\overline{z}}(x,y_0)=\int\limits_0^x F^z(\tau,\overset{n}{g_r}(\tau;y_0),\overset{n}{r},\overset{n}{p},\overset{n}{q})(\tau,\overset{n}{g_r}(\tau,y_0))d\tau+z^0(y_0) \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\overset{n+1}{\overline{r}}(x,y_0)$; $\overset{n+1}{\overline{s}}(x,y_0)$; $\overset{n+1}{\overline{p}}(x,y_0)$; $\overset{n+1}{\overline{q}}(x,y_0)$; $\overset{n+1}{\overline{z}}(x,y_0)$ есть решение задачи Коши для системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\overset{n+1}{\overline{r}}=F^r(x,\overset{n}{g_s}(x;y_0),\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})(x,\overset{n}{g_s}(x;y_0)) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\overset{n+1}{\overline{s}}=F^s(x,\overset{n}{g_r}(x;y_0),\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})(x,\overset{n}{g_r}(x;y_0)) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\overset{n+1}{\overline{p}}=F^p(x,\overset{n}{g_s}(x;y_0),\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})(x,\overset{n}{g_s}(x;y_0)) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\overset{n+1}{\overline{q}}=F^q(x,\overset{n}{g_r}(x;y_0),\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})(x,\overset{n}{g_r}(x;y_0)) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\overset{n+1}{\overline{z}}=F^z(x,\overset{n}{g_r}(x;y_0),\overset{n}{r},\overset{n}{p},\overset{n}{q})(x,\overset{n}{g_r}(x;y_0)) \end{cases} \tag{31}$$

с начальными данными

$$\begin{gathered} \overset{n+1}{\overline{r}}(0,y_0)=r^0(y_0); \quad \overset{n+1}{\overline{s}}(0,y_0)=s^0(y_0); \quad \overset{n+1}{\overline{p}}(0,y_0)=p^0(y_0); \\ \overset{n+1}{\overline{q}}(0,y_0)=q^0(y_0); \quad \overset{n+1}{\overline{z}}(0,y_0)=z^0(y_0). \end{gathered} \tag{32}$$

Дифференцируя по y_0 равенства (30) получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{r}}(x,y_0)=\dfrac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{r}(x,y)\Big|_{y=\overset{n}{g}_s(x,y_0)}\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n}{g}_s(x,y_0),\\ \dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{s}}(x,y_0)=\dfrac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{s}(x,y)\Big|_{y=\overset{n}{g}_r(x,y_0)}\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n}{g}_r(x,y_0),\\ \dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{p}}(x,y_0)=\dfrac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{p}(x,y)\Big|_{y=\overset{n}{g}_s(x,y_0)}\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n}{g}_s(x,y_0),\\ \dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{q}}(x,y_0)=\dfrac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{q}(x,y)\Big|_{y=\overset{n}{g}_r(x,y_0)}\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n}{g}_r(x,y_0),\\ \dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{z}}(x,y_0)=\dfrac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{z}(x,y)\Big|_{y=\overset{n}{g}_r(x,y_0)}\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n}{g}_r(x,y_0), \end{cases}$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{r}(x,y)=\frac{\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{r}}(x,y_0)}{\dfrac{\partial}{\partial y}\overset{n}{g}_s(x,y_0)},\ \frac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{s}(x,y)=\frac{\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{s}}(x,y_0)}{\dfrac{\partial}{\partial y}\overset{n}{g}_r(x,y_0)},\ \frac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{p}(x,y)=\frac{\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{p}}(x,y_0)}{\dfrac{\partial}{\partial y}\overset{n}{g}_s(x,y_0)},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{q}(x,y)=\frac{\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{q}}(x,y_0)}{\dfrac{\partial}{\partial y}\overset{n}{g}_r(x,y_0)},\ \frac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{z}(x,y)=\frac{\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{z}}(x,y_0)}{\dfrac{\partial}{\partial y}\overset{n}{g}_r(x,y_0)}. \tag{33}$$

Дифференцируя по y^0 формулы (28), (29), получим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\overset{n}{g}_r(x,y_0)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\overset{n}{r}(x,y)\Big|_{y=\overset{n}{g}_r(x,y_0)}\frac{\partial}{\partial y_0}\overset{n}{g}_r(x,y_0),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\overset{n}{g}_s(x,y_0)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\overset{n}{r}(x,y)\Big|_{y=\overset{n}{g}_s(x,y_0)}\frac{\partial}{\partial y_0}\overset{n}{g}_s(x,y_0),$$

или

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\overset{n}{g}_r(x,y_0)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\overset{n}{r}(x,y)\Big|_{y=\overset{n}{g}_r(x,y_0)},\\ &\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\underset{s}{\overset{n}{g}}(x,y_0)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\overset{n}{s}(x,y)\Big|_{y=\overset{n}{g}_s(x,y_0)}, \end{aligned} \tag{34}$$

и начальные условия

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\overset{n}{g}_r\right)(0,y_0)=1,\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\overset{n}{g}_s\right)(0,y_0)=1. \tag{35}$$

Пусть $\upsilon(x,y)\in \mathrm{C}^1$ – произвольная функция. Введем обозначение

$$\left(\frac{d}{dx}\upsilon\right)_s=\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+\overset{n}{r}\frac{\partial\upsilon}{\partial y},\qquad \left(\frac{d}{dx}\upsilon\right)_r=\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+\overset{n}{s}\frac{\partial\upsilon}{\partial y}.$$

Вычитая из равенства $\overset{n+1}{s}_x + \overset{n}{r}\,\overset{n+1}{s}_y = F^s(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})$ равенство $\overset{n+1}{s}_x + \overset{n}{s}\,\overset{n+1}{s}_y = \left(\frac{d}{dx}\overset{n+1}{s}\right)_r$, получим $\overset{n+1}{s}_y = \dfrac{F^s(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q}) - \left(\frac{d}{dx}\overset{n+1}{s}\right)_r}{\overset{n}{r}-\overset{n}{s}}$.

Преобразуем это равенство:

$$\overset{n+1}{s}_y = \frac{F^s(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},,\overset{n}{q}) - \left(\frac{d}{dx}\overset{n+1}{s}\right)_r}{\overset{n}{r}-\overset{n}{s}} =$$

$$= \frac{F^s(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q}) - F^r(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})}{\overset{n}{r}-\overset{n}{s}} + \frac{F^r(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q}) - \left(\frac{d}{dx}\overset{n+1}{s}\right)_r}{\overset{n}{r}-\overset{n}{s}} =$$

$$= \frac{F^s(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q}) - F^r(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})}{\overset{n}{r}-\overset{n}{s}} + \frac{\left(\overset{n+1}{r}_x + \overset{n}{s}\,\overset{n+1}{r}_y\right) - \left(\frac{d}{dx}\overset{n+1}{s}\right)_r}{\overset{n}{r}-\overset{n}{s}} =$$

$$= \frac{F^s(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q}) - F^r(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})}{\overset{n}{r}-\overset{n}{s}} + \frac{\left(\frac{d}{dx}\overset{n+1}{r}\right)_r - \left(\frac{d}{dx}\overset{n+1}{s}\right)_r}{\overset{n}{r}-\overset{n}{s}} =$$

$$= \frac{F^s(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q}) - F^r(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})}{\overset{n}{r}-\overset{n}{s}} + \frac{\left(\frac{d}{dx}(\overset{n+1}{r} - \overset{n+1}{s})\right)_r}{\overset{n+1}{r} - \overset{n+1}{s}}\,\frac{\overset{n+1}{r} - \overset{n+1}{s}}{\overset{n}{r}-\overset{n}{s}} =$$

$$= \frac{F^s(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q}) - F^r(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})}{\overset{n}{r}-\overset{n}{s}} + \left(\frac{d}{dx}\ln(\overset{n+1}{r} - \overset{n+1}{s})\right)_r \frac{\overset{n+1}{r} - \overset{n+1}{s}}{\overset{n}{r}-\overset{n}{s}}.$$

Так как функции $F^r(x,y,r,s,p,q)$, $F^s(x,y,r,s,p,q)$, $F^p(x,y,s,p,q)$, $F^q(x,y,p,q)$, $F^z(x,y,r,p,q)$ непрерывно дифференцируемы по r, s, p, q, z, x, y, а семейство $\left\{\overset{n}{r}\right\}$, $\left\{\overset{n}{s}\right\}$, $\left\{\overset{n}{p}\right\}$, $\left\{\overset{n}{q}\right\}$, $\left\{\overset{n}{z}\right\}$ равномерно ограничено, то существует константа C, такая что

$$|F^{\omega}| \le \mathrm{C}, \quad \left|\frac{\partial F^{\omega}}{\partial \mu}\right| \le \mathrm{C}, \quad \omega = r,s,p,q,z, \quad \mu = r,s,p,q,z,x,y. \tag{36}$$

Используя оценки (23), (27), (36), получим

$$\left|\frac{F^s(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q}) - F^r(x,y,\overset{n}{r},\overset{n}{s},\overset{n}{p},\overset{n}{q})}{\overset{n}{r}-\overset{n}{s}}\right| \le \frac{2\mathrm{C}}{\varepsilon}, \left|\frac{\overset{n+1}{r} - \overset{n+1}{s}}{\overset{n}{r}-\overset{n}{s}}\right| \le \frac{2}{\varepsilon}, \tag{37}$$

откуда

$$-\frac{2\mathrm{C}}{\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon}\left|\left(\frac{d}{dx}\ln(\overset{n+1}{r} - \overset{n+1}{s})\right)_r\right| \le \frac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{s} \le \frac{2\mathrm{C}}{\varepsilon} + \frac{2}{\varepsilon}\left|\left(\frac{d}{dx}\ln(\overset{n+1}{r} - \overset{n+1}{s})\right)_r\right|. \tag{38}$$

Пусть X^+, X^- – такие множества, что

$$\left(\frac{d}{dx}\ln(\overset{n+1}{r} - \overset{n+1}{s})\right)_r \ge 0 \text{ для } x \in X^+, \quad \left(\frac{d}{dx}\ln(\overset{n+1}{r} - \overset{n+1}{s})\right)_r < 0 \text{ для } x \in X^-.$$

Тогда при $x \in X^+$ имеем

$$-\frac{2\mathrm{C}}{\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{d}{dx}\ln(\overset{n+1}{r} - \overset{n+1}{s})\right)_r \le \frac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{s} \le \frac{2\mathrm{C}}{\varepsilon} + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{d}{dx}\ln(\overset{n+1}{r} - \overset{n+1}{s})\right)_r.$$

Отсюда

$$-\frac{2\mathrm{C}}{\varepsilon}-\left(\frac{d}{dx}\ln\left[(\overset{n+1}{r}-\overset{n+1}{s})^{\frac{2}{\varepsilon}}\right]\right)_r\le\frac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{s}\le\frac{2\mathrm{C}}{\varepsilon}+\left(\frac{d}{dx}\ln\left[(\overset{n+1}{r}-\overset{n+1}{s})^{\frac{2}{\varepsilon}}\right]\right)_r. \qquad (39)$$

С учетом (39) из (34), получим неравенства

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{g}_r(x,y_0)\right)\ge-\frac{2\mathrm{C}}{\varepsilon}-\left(\frac{d}{dx}\ln\left[(\overset{n+1}{r}-\overset{n+1}{s})^{\frac{2}{\varepsilon}}\right]\right)_r\Big|_{y=\overset{n+1}{g}_r(x,y_0)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{g}_r(x,y_0)\right)\le\frac{2\mathrm{C}}{\varepsilon}+\left(\frac{d}{dx}\ln\left[(\overset{n+1}{r}-\overset{n+1}{s})^{\frac{2}{\varepsilon}}\right]\right)_r\Big|_{y=\overset{n+1}{g}_r(x,y_0)}.$$

Преобразовав эти неравенства, получим

$$\left(\frac{d}{dx}\ln\left\{(\overset{n+1}{r}-\overset{n+1}{s})^{\frac{2}{\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial y_o}\overset{n+1}{g}_r(x,y_0)\right\}\right)_r\Big|_{y=\overset{n+1}{g}_r(x,y_0)}\ge-\frac{2\mathrm{C}}{\varepsilon},$$

$$\left(\frac{d}{dx}\ln\left\{(\overset{n+1}{r}-\overset{n+1}{s})^{-\frac{2}{\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial y_o}\overset{n+1}{g}_r(x,y_0)\right\}\right)_r\Big|_{y=\overset{n+1}{g}_r(x,y_0)}\le\frac{2\mathrm{C}}{\varepsilon}.$$

Проинтегрировав полученные неравенства, имеем

$$\left(\frac{\overset{n+1}{r}-\overset{n+1}{s}}{r^0-s^0}\right)^{-\frac{2}{\varepsilon}}\exp\left\{-\int_0^x\frac{2\mathrm{C}}{\varepsilon}d\tau\right\}\le\frac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{g}_r(x,y_0)\le\left(\frac{\overset{n+1}{r}-\overset{n+1}{s}}{r^0-s^0}\right)^{\frac{2}{\varepsilon}}\exp\left\{\int_0^x\frac{2\mathrm{C}}{\varepsilon}d\tau\right\}.$$

Повторив предыдущие рассуждения для $x\in X^-$, получим неравенства

$$\left(\frac{r^0-s^0}{\overset{n+1}{r}-\overset{n+1}{s}}\right)^{-\frac{2}{\varepsilon}}\exp\left\{-\int_0^x\frac{2\mathrm{C}}{\varepsilon}d\tau\right\}\le\frac{\partial}{\partial y_0}\underset{r}{\overset{n+1}{g}}(x,y_0)\le\left(\frac{r^0-s^0}{\overset{n+1}{r}-\overset{n+1}{s}}\right)^{\frac{2}{\varepsilon}}\exp\left\{\int_0^x\frac{2\mathrm{C}}{\varepsilon}d\tau\right\}.$$

Оценки производных $\frac{\partial}{\partial y_o}\overset{n+1}{g}_s(x,y_0)$ получаются аналогично. Поэтому, учитывая (23) и (27), имеем оценки для $\overset{n}{g}_r(x,y_0)$ и $\overset{n}{g}_s(x,y_0)$, $(n=1,2,3,\ldots)$:

$$\frac{1}{\psi(x)}\le\frac{\partial}{\partial y_0}\overset{n}{g}_r(x,y_0)\le\psi(x),\qquad\frac{1}{\psi(x)}\le\frac{\partial}{\partial y_0}\overset{n}{g}_s(x,y_0)\le\psi(x), \qquad (40)$$

где $\psi(x)=\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{\varepsilon}}e^{\frac{2\mathrm{C}}{\varepsilon}x}$, $\psi(x)\ge 1$.

Дифференцируя формулы (31) по параметру y_0, получим

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{r}}\right)=\dfrac{\partial F^r}{\partial\overset{n}{r}}\dfrac{\partial\overset{n}{r}}{\partial\overset{n}{g}_s}\dfrac{\partial\overset{n}{g}_s}{\partial y_0}+\dfrac{\partial F^r}{\partial\overset{n}{s}}\dfrac{\partial\overset{n}{s}}{\partial\overset{n}{g}_s}\dfrac{\partial\overset{n}{g}_s}{\partial y_0}+\dfrac{\partial F^r}{\partial\overset{n}{p}}\dfrac{\partial\overset{n}{p}}{\partial\overset{n}{g}_s}\dfrac{\partial\overset{n}{g}_s}{\partial y_0}+\dfrac{\partial F^r}{\partial\overset{n}{q}}\dfrac{\partial\overset{n}{q}}{\partial\overset{n}{g}_s}\dfrac{\partial\overset{n}{g}_s}{\partial y_0}+\dfrac{\partial F^r}{\partial\overset{n}{g}_s}\dfrac{\partial\overset{n}{g}_s}{\partial y_0}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{r}}(0,y_0)=r^0_y(y_0).\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{s}}\right)=\dfrac{\partial F^s}{\partial\overset{n}{r}}\dfrac{\partial\overset{n}{r}}{\partial\overset{n}{g}_r}\dfrac{\partial\overset{n}{g}_r}{\partial y_0}+\dfrac{\partial F^s}{\partial\overset{n}{s}}\dfrac{\partial\overset{n}{s}}{\partial\overset{n}{g}_r}\dfrac{\partial\overset{n}{g}_r}{\partial y_0}+\dfrac{\partial F^s}{\partial\overset{n}{p}}\dfrac{\partial\overset{n}{p}}{\partial\overset{n}{g}_r}\dfrac{\partial\overset{n}{g}_r}{\partial y_0}+\dfrac{\partial F^s}{\partial\overset{n}{q}}\dfrac{\partial\overset{n}{q}}{\partial\overset{n}{g}_r}\dfrac{\partial\overset{n}{g}_r}{\partial y_0}+\dfrac{\partial F^s}{\partial\overset{n}{g}_r}\dfrac{\partial\overset{n}{g}_r}{\partial y_0}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{s}}(0,y_0)=s^0_y(y_0).\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{p}}\right)=\dfrac{\partial F^p}{\partial \overset{n}{s}}\dfrac{\partial \overset{n}{s}}{\partial \overset{n}{g}_s}\dfrac{\partial \overset{n}{g}_s}{\partial y_0}+\dfrac{\partial F^p}{\partial \overset{n}{p}}\dfrac{\partial \overset{n}{p}}{\partial \overset{n}{g}_s}\dfrac{\partial \overset{n}{g}_s}{\partial y_0}+\dfrac{\partial F^p}{\partial \overset{n}{q}}\dfrac{\partial \overset{n}{q}}{\partial \overset{n}{g}_s}\dfrac{\partial \overset{n}{g}_s}{\partial y_0}+\dfrac{\partial F^p}{\partial \overset{n}{g}_s}\dfrac{\partial \overset{n}{g}_s}{\partial y_0}\\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{p}}(0,y_0)=p_y^0(y_0).
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{q}}\right)=\dfrac{\partial F^q}{\partial \overset{n}{p}}\dfrac{\partial \overset{n}{p}}{\partial \overset{n}{g}_r}\dfrac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0}+\dfrac{\partial F^q}{\partial \overset{n}{q}}\dfrac{\partial \overset{n}{q}}{\partial \overset{n}{g}_r}\dfrac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0}+\dfrac{\partial F^q}{\partial \overset{n}{g}_r}\dfrac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0}\\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{q}}(0,y_0)=q_y^0(y_0).
\end{cases}
\tag{41}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{z}}\right)=\dfrac{\partial F^z}{\partial \overset{n}{r}}\dfrac{\partial \overset{n}{r}}{\partial \overset{n}{g}_r}\dfrac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0}+\dfrac{\partial F^z}{\partial \overset{n}{p}}\dfrac{\partial \overset{n}{p}}{\partial \overset{n}{g}_r}\dfrac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0}+\dfrac{\partial F^z}{\partial \overset{n}{q}}\dfrac{\partial \overset{n}{q}}{\partial \overset{n}{g}_r}\dfrac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0}+\dfrac{\partial F^z}{\partial \overset{n}{g}_r}\dfrac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0}\\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{z}}(0,y_0)=z_y^0(y_0).
\end{cases}
$$

Обозначим $V_0=max\left\{\sup\limits_{y\in R}\left|r_y^0(y)\right|,\sup\limits_{y\in R}\left|s_y^0(y)\right|,\sup\limits_{y\in R}\left|p_y^0(y)\right|,\sup\limits_{y\in R}\left|q_y^0(y)\right|,\sup\limits_{y\in R}\left|z_y^0(y)\right|\right\}$, и рассмотрим ассоциированную с задачей (41) мажорантную задачу

$$
\begin{cases}
\frac{d}{dx}V=4!\psi^2(x)V+!\psi(x),\\
V(0)=V_0.
\end{cases}
\tag{42}
$$

Задача Коши (42) рассматривается для линейного уравнения относительно функции $V(x)$ и поэтому имеет решение на всей прямой.

Так как $\psi\geq 1$, то начальное приближение $\overset{0}{r}$, $\overset{0}{s}$, $\overset{0}{p}$, $\overset{0}{q}$, $\overset{0}{z}$ удовлетворяет неравенствам

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\overset{0}{r}\right|\leq\psi(x)V(x),\ \left|\frac{\partial}{\partial y}\overset{0}{s}\right|\leq\psi(x)V(x),\ \left|\frac{\partial}{\partial y}\overset{0}{p}\right|\leq\psi(x)V(x),\ \left|\frac{\partial}{\partial y}\overset{0}{q}\right|\leq\psi(x)V(x),\ \left|\frac{\partial}{\partial y}\overset{0}{z}\right|\leq\psi(x)V(x).$$

Предположим, что

$$
\begin{gathered}
\left|\tfrac{\partial}{\partial y}\overset{n}{r}\right|\leq\psi(x)V(x),\left|\tfrac{\partial}{\partial y}\overset{n}{s}\right|\leq\psi(x)V(x),\left|\tfrac{\partial}{\partial y}\overset{n}{p}\right|\leq\psi(x)V(x),\\[2ex]
\left|\tfrac{\partial}{\partial y}\overset{n}{q}\right|\leq\psi(x)V(x),\left|\tfrac{\partial}{\partial y}\overset{n}{z}\right|\leq\psi(x)V(x),
\end{gathered}
\tag{43}
$$

Учитывая оценки (36), (40), (43), по формулам (18), (41) получим оценки:

$$
\left|\frac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{r}}\right|\leq\left|r_y^0\right|+\int\limits_0^x\left(\frac{\partial F^r}{\partial \overset{n}{r}}\frac{\partial \overset{n}{r}}{\partial \overset{n}{g}_s}\frac{\partial \overset{n}{g}_s}{\partial y_0}+\frac{\partial F^r}{\partial \overset{n}{s}}\frac{\partial \overset{n}{s}}{\partial \overset{n}{g}_s}\frac{\partial \overset{n}{g}_s}{\partial y_0}+\frac{\partial F^r}{\partial \overset{n}{p}}\frac{\partial \overset{n}{p}}{\partial \overset{n}{g}_s}\frac{\partial \overset{n}{g}_s}{\partial y_0}+\frac{\partial F^r}{\partial \overset{n}{q}}\frac{\partial \overset{n}{q}}{\partial \overset{n}{g}_s}\frac{\partial \overset{n}{g}_s}{\partial y_0}+\frac{\partial F^r}{\partial \overset{n}{g}_s}\frac{\partial \overset{n}{g}_s}{\partial y_0}\right)\times
$$

$$
\times(\tau,\overset{n}{g}_s(\tau;y_0))d\tau\leq V_0+\int\limits_0^x(4\mathrm{C}\psi^2(\tau)V(\tau)+\mathrm{C}\psi(\tau))d\tau=V(x),
$$

$$
\left|\frac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{s}}\right|\leq\left|s_y^0\right|+\int\limits_0^x\left(\frac{\partial F^s}{\partial \overset{n}{r}}\frac{\partial \overset{n}{r}}{\partial \overset{n}{g}_r}\frac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0}+\frac{\partial F^s}{\partial \overset{n}{s}}\frac{\partial \overset{n}{s}}{\partial \overset{n}{g}_r}\frac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0}+\frac{\partial F^s}{\partial \overset{n}{p}}\frac{\partial \overset{n}{p}}{\partial \overset{n}{g}_r}\frac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0}+\frac{\partial F^s}{\partial \overset{n}{q}}\frac{\partial \overset{n}{q}}{\partial \overset{n}{g}_r}\frac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0}+\frac{\partial F^s}{\partial \overset{n}{g}_r}\frac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0}\right)\times
$$

$$
\times(\tau,\overset{n}{g}_r(\tau;y_0))d\tau\leq V_0+\int\limits_0^x(4\mathrm{C}\psi^2(\tau)V(\tau)+\mathrm{C}\psi(\tau))d\tau=V(x),
$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{p}}\right| \le \left|p_y^0\right| + \int\limits_0^x \left(\frac{\partial F^p}{\partial \overset{n}{s}}\frac{\partial \overset{n}{s}}{\partial \overset{n}{g}_s}\frac{\partial \overset{n}{g}_s}{\partial y_0} + \frac{\partial F^p}{\partial \overset{n}{p}}\frac{\partial \overset{n}{p}}{\partial \overset{n}{g}_s}\frac{\partial \overset{n}{g}_s}{\partial y_0} + \frac{\partial F^p}{\partial \overset{n}{q}}\frac{\partial \overset{n}{q}}{\partial \overset{n}{g}_s}\frac{\partial \overset{n}{g}_s}{\partial y_0} + \frac{\partial F^p}{\partial \overset{n}{g}_s}\frac{\partial \overset{n}{g}_s}{\partial y_0}\right) \times$$

$$\times(\tau, \overset{n}{g}_s(\tau; y_0))d\tau \le V_0 + \int\limits_0^x (3\mathrm{C}\psi^2(\tau)V(\tau) + \mathrm{C}\psi(\tau))d\tau \le$$

$$\le V_0 + \int\limits_0^x (4\mathrm{C}\psi^2(\tau)V(\tau) + \mathrm{C}\psi(\tau))d\tau = V(x),$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{q}}\right| \le \left|q_y^0\right| + \int\limits_0^x \left(\frac{\partial F^q}{\partial \overset{n}{p}}\frac{\partial \overset{n}{p}}{\partial \overset{n}{g}_r}\frac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0} + \frac{\partial F^q}{\partial \overset{n}{q}}\frac{\partial \overset{n}{q}}{\partial \overset{n}{g}_r}\frac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0} + \frac{\partial F^q}{\partial \overset{n}{g}_r}\frac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0}\right) \times$$

$$\times(\tau, \overset{n}{g}_r(\tau; y_0))d\tau \le V_0 + \int\limits_0^x (2\mathrm{C}\psi^2(\tau)V(\tau) + \mathrm{C}\psi(\tau))d\tau \le \tag{44}$$

$$\le V_0 + \int\limits_0^x (4\mathrm{C}\psi^2(\tau)V(\tau) + \mathrm{C}\psi(\tau))d\tau = V(x),$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_0}\overset{n+1}{\overline{z}}\right| \le \left|z_y^0\right| + \int\limits_0^x \left(\frac{\partial F^z}{\partial \overset{n}{r}}\frac{\partial \overset{n}{r}}{\partial \overset{n}{g}_r}\frac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0} + \frac{\partial F^z}{\partial \overset{n}{p}}\frac{\partial \overset{n}{p}}{\partial \overset{n}{g}_r}\frac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0} + \frac{\partial F^z}{\partial \overset{n}{q}}\frac{\partial \overset{n}{q}}{\partial \overset{n}{g}_r}\frac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0} + \frac{\partial F^z}{\partial \overset{n}{g}_r}\frac{\partial \overset{n}{g}_r}{\partial y_0}\right) \times$$

$$\times(\tau, \overset{n}{g}_r(\tau; y_0))d\tau \le V_0 + \int\limits_0^x (3\mathrm{C}\psi^2(\tau)V(\tau) + \mathrm{C}\psi(\tau))d\tau \le$$

$$\le V_0 + \int\limits_0^x (4\mathrm{C}\psi^2(\tau)V(\tau) + \mathrm{C}\psi(\tau))d\tau = V(x).$$

Из формул (33), пользуясь оценками (40), (44), получаем

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{r}(x,y)\right| \le \psi(x)V(x), \left|\frac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{s}(x,y)\right| \le \psi(x)V(x),$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{p}(x,y)\right| \le \psi(x)V(x), \tag{45}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{q}(x,y)\right| \le \psi(x)V(x), \left|\frac{\partial}{\partial y}\overset{n+1}{z}(x,y)\right| \le \psi(x)V(x).$$

Обозначим $F(x) = \psi(x)V(x)$. Тогда из (45) следует утверждение леммы 4. □

Таким образом, доказана равномерная ограниченность приближенных решений и их производных, т. е. равномерная ограниченность итерационной последовательности. Дальнейшее доказательство теоремы существования и единственности для задачи Коши (11), (15) проводится по стандартной схеме, использующей теорему Арцела [4].

Сформулируем достаточные условия, обеспечивающие существование C^3-гладкого решения задачи Коши (1) на всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

Пусть C_1, C_2 – произвольные положительные постоянные, ε, δ – постоянные, связанные условиями $0 < \varepsilon < \delta$, $\frac{\delta-\varepsilon}{2} < 1$. Функции $r^0(y)$, $s^0(y)$ заданы формулами (15).

Т е о р е м а 2. *При выполнении условий:*

1) *функция* $\Delta \in C^2(\mathbb{R}^4)$, *начальные условия* $z^0 \in C^3(\mathbb{R})$, $p^0 \in C^2(\mathbb{R})$;

2) *функция* $z^0(y)$ C^3 *– ограничена, функция* $p^0(y)$ C^2 *– ограничена;*

3) $|\Delta| \leq 2C_1$, $\frac{1}{\Delta} \leq C_2$, $\left|\frac{\partial\Delta}{\partial\omega}\right| \leq C_1\ \eta(x)$, *где* $\omega = x, y$; $0 < C_1 \leq \frac{1}{2}$; $C_2 > 0$;

4) $N_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \eta(x)\,dx \leq \frac{\delta-\varepsilon}{2}$; $N_1 = \max\left\{C_1,\ \frac{1}{2}C_1C_2\right\}$, $0 < \varepsilon < \delta$, $\frac{\delta-\varepsilon}{2} < 1$, $\eta(x)$ *– произвольная положительная функция;*

5) $\left|r^0\right|$, $\left|s^0\right| \leq 1 - \frac{\delta-\varepsilon}{2}$, $\left|z^0\right|$, $\left|z_y^0\right|$, $\left|p^0\right| \leq 1$;

6) $\inf_{y\epsilon\mathbb{R}} r^0(y) - \sup_{y\epsilon\mathbb{R}} s^0(y) \geq \delta > 0$.

на плоскости $\mathbb{R}^2$ *существует единственное* C^3 *– гладкое решение задачи Коши* (6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполняются условия 1)-6). Докажем, что эти условия обеспечивают выполнение условий (30), (33), (34).

Используя условие 3), получаем оценки коэффициентов системы (23):

$$\left|\frac{\Delta_x}{2\Delta}\right| \leq \frac{1}{2}\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\eta(x), \quad \left|\frac{\Delta_y}{2\Delta}\right| \leq \frac{1}{2}\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\eta(x), \quad \left|\frac{\Delta}{2}\right| \leq \mathrm{C}_1.$$

Обозначим $N_1 = \max\left\{\mathrm{C}_1,\ \frac{1}{2}\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\right\}$. Отсюда, согласно формулам (29), имеем оценки

$$\alpha_1(x) \leq \max\left\{\mathrm{C}_1, \frac{1}{2}\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\right\}\ \eta(x) = N_1\eta(x), \alpha_2 \leq \mathrm{C}_1. \tag{46}$$

Тогда неравенства (46) и условия 5) обеспечивают выполнение второго неравенства (30):

$$\alpha_0 + 4\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha_1(x)\,dx \leq \alpha_0 + N_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \eta(x)\,dx \leq 1 - \frac{\delta-\varepsilon}{2} + \frac{\delta-\varepsilon}{2} = 1.$$

Условие 4) обеспечивает выполнение третьего неравенства (30). Условие 6) обеспечивает выполнимость неравенства (35) . Неравенство (34) с учетом сделанных обозначений и оценок (46) есть условие 5).

Таким образом, условия 1)–6) обеспечивают выполнение неравенств (30), (33), (34), которые в свою очередь обеспечивают существование единственного C^1-решение задачи (11), (15) в полуплоскости $x \geq 0$.

Решение в полуплоскости $x \leq 0$ строится аналогично. C^1-гладкость решения обеспечивается одинаковыми начальными данными.

В работе [3] доказано, что C^1-решение задачи (24), (25) соответствует C^3-решение задачи (6). □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Из теоремы 2 следует существование функции $z = z(x, y)$, являющейся C^3- гладким решением уравнения (1) на плоскости $\mathbb{R}^2$. Эта функция задает в трехмерном евклидовом пространстве C^3- регулярную поверхность. Вычислим гауссову кривизну этой поверхности $K(x, y) = \dfrac{z_{xx}z_{yy} - {z_{xy}}^2}{\left(1 + z_x^2 + z_y^2\right)^2}$. Легко получим, что $K(x, y) = f(x, y)$, т. к. функция $z = z(x, y)$ есть решение уравнения (1) при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бакельман И.Я., Вернер Л.А., Кантор Б.Е.* Введение в дифференциальную геометрию «в целом». М.: Наука, 1973.

2. *Братков Ю.Н.* О существовании классического решения гиперболического уравнения Монжа-Ампера в целом // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6. № 2.

3. *Туницкий Д.В.* Системы в римановых инвариантах и уравнения Монжа-Ампера гиперболического типа // Деп.ВИНИТИ 16.07.87, № 5122-В87.

4. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложений к газовой динамике. М.: Наука, 1978.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00877).

Поступила в редакцию 3 октября 2016 г.

Фомичева Юлия Геннадьевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, e-mail: fomichevajulia@mail.ru

Рудиченко Анастасия Андреевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, магистр, кафедра функционального анализа, e-mail: nastya2801@mail.ru

UDC 514.7
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2068-2084

APPLICATION METHOD OF RIEMANN INVARIANTS TO SOLVE THE PROBLEM OF SURFACE RECONSTRUCTION ON THE SET OF NEGATIVE GAUSSIAN CURVATURE

© **Yu. G. Fomicheva, A. A. Rudichenko**

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: fomichevajulia@mail.ru

This paper addresses the question of recoverability in the three-dimensional Euclidean space with C^3 –regular surface explicitly specified by the equation $z = z(x, y)$ on the entire plane of $\mathbb{R}^2$ on its specified negative Gaussian curvature. The solution to this problem is reduced to the proof of existence and uniqueness of the $\mathbb{R}^2$ of the classical solving differential equations of Monge-Ampere equations of hyperbolic type. Formulated the conditions for the existence of such a decision as a whole.

Key words: restoration of surfaces; Gaussian curvature; a hyperbolic Monge-Ampere equation; the Cauchy problem; Riman invariants

REFERENCES

1. *Bakel'man I.YA., Verner L.A., Kantor B.E.* Vvedenie v differencial'nuyu geometriyu «v celom». M.: Nauka, 1973.

2. *Bratkov YU.N.* O sushchestvovanii klassicheskogo resheniya giperbolicheskogo uravneniya Monzha-Ampera v celom // Fundamental'naya i prikladnaya matematika. 2000. T. 6. № 2.

3. *Tunickij D.V.* Sistemy v rimanovyh invariantah i uravneniya Monzha-Ampera giperbolicheskogo tipa // Dep.VINITI 16.07.87, № 5122-V87.

4. *Rozhdestvenskij B.L., YAnenko N.N.* Sistemy kvazilinejnyh uravnenij i ih prilozhenij k gazovoj dinamike. M.: Nauka, 1978.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 14-01-00877).

Received 3 October 2016

Fomicheva Yuliya Gennadievna, Tambov State University named after G.R. Derzhavina, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: fomichevajulia@mail.ru

Rudichenko Anastasiya Andreevna, Tambov State University named after G.R. Derzhavina, Tambov, the Russian Federation, Master program student of the Functional Analysis Department, e-mail: nastya2801@mail.ru

Информация для цитирования:

Фомичева Ю.Г., Рудиченко А.А. Применение метода римановых инвариантов к решению задачи о восстановлении поверхности по заданной отрицательной гауссовой кривизне // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2068-2084. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2068-2084

Fomicheva Yu.G., Rudichenko A.A. Primenenie metoda rimanovyh invariantov k resheniyu zadachi o vosstanovlenii poverhnosti po zadannoj otritsatel'noj gaussovoj krivizne [Application method of Riemann invariants to solve the problem of surface reconstruction on the set of negative gaussian curvature]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 2068-2084. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2068-2084 (In Russian)