УДК 517.988.6, 517.965
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1963-1968

О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

© **Т. В. Жуковская** [1], **И. А. Забродский** [2], **И. Д. Серова** [2]

[1] Тамбовский государственный технический университет
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
[2] Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: zh-imfi.tsu@yandex.ru

Рассматривается функциональное уравнение вида $g(t,x(h(t)),x(t))=0$, относительно измеримой существенно ограниченной функции $x(t)$, $t\in[a,b]$. Получены условия, гарантирующие, что если для некоторой существенно ограниченной функции $u(t)$, $t\in[a,b]$ выполнено неравенство $g(t,u(h(t)),u(t))\geq 0$, $t\in[a,b]$, то имеет место оценка $x(t)\leq u(t)$. Используются результаты Е.С. Жуковского об антитонных возмущениях упорядоченно накрывающих отображений.

Ключевые слова: функциональные уравнения и неравенства; накрывающие отображения; пространство с векторнозначной метрикой

Введение. В исследовании уравнений важную роль играют оценки решений. Для получения оценок часто используется подход, основанный на том, что если элемент u удовлетворяет неравенству $F(u)\geq y$, то при некоторых дополнительных условиях на отображение F для решения x уравнения

$$F(x)=y \tag{1}$$

выполнена оценка $x\leq u$. Для интегральных и дифференциальных уравнений такие утверждения называют теоремами типа Чаплыгина (см. [1], [2]). Для операторных уравнений в произвольных упорядоченных пространствах подобные утверждения получены в работах [3]–[7] на основе понятия упорядоченного накрывания отображений. Здесь предлагается использовать полученную в [7] теорему об антитонном возмущении упорядоченно накрывающего отображения для исследования функционального уравнения с отклоняющимся аргументом и получения для такого уравнения теоремы типа Чаплыгина.

1. Основные понятия. Частично упорядоченное пространство, т. е. множество X с заданным на нем порядком $\preceq$ обозначаем через $(X,\preceq)$ или X. Для элементов $u,v\in X$ будем обозначать

$$\mathrm{O}_X(u)\doteq\{x\in X:\ x\preceq u\},\quad [u,v]_X\doteq\{x\in X:\ v\preceq x\preceq u\}.$$

Используем также обозначения $x\preceq u$ в случае, если $u\succeq x$, и $x\prec u$, или $u\succ x$, если $x\preceq u$, $x\neq u$.

Пусть заданы пространства $(X,\preceq)$, $(Y,\preceq)$. Отображение $F:X\to Y$ называют (см., например, [8], с. 329) *изотонным на* множестве $V\subset X$, если для любых $x,u\in V$ из $x\succeq u$ следует $F(x)\succeq F(u)$, и *антитонным на* $V\subset X$, если для любых $x,u\in V$ из $x\succeq u$ следует $F(x)\preceq F(u)$. Изотонное (антитонное) на всем X отображение называют *изотонным* (*антитонным*).

В [3] введено следующее

О п р е д е л е н и е 1. Отображение $F:X\to Y$ называется *упорядоченно накрывающим множество* $W\subset Y$, если если для любого $u\in X$ выполнено включение

$$\mathrm{O}_Y\big(F(u)\big)\cap W\subset F\big(\mathrm{O}_X(u)\big);$$

или, что то же самое,

$$\forall\, u\in X \ \ \forall\, y\in W \ \ y\preceq f(u) \ \ \Rightarrow \ \ \exists x\in X \ \ F(x)=y \ \& \ x\preceq u.$$

Отображение, упорядоченно накрывающее все пространство Y, называется *упорядоченно накрывающим.*

Сформулируем теорему из [7], существенно используемую в данной работе (приведем здесь это утверждение несколько в менее общем виде, чем в цитируемой статье, но достаточном для нашего изложения).

Рассмотрим уравнение (1) с заданными правой частью $y\in Y$ и отображением $F:X\to Y$, представимом в виде

$$F(x)\doteq\Upsilon(x,x), \quad \forall x\in X,$$

где отображение $\Upsilon:X^2\to Y$ по одному аргументу обладает свойством упорядоченного накрывания, а по другому — монотонности.

По отображению $\Upsilon:X^2\to Y$ множеству $U\subset X$ и элементу $y\in Y$ определим множество $\mathcal{S}(\Upsilon,U,y)$ всех цепей $S\subset U$ таких, что

$$\forall\, x\in S \ \ \Upsilon(x,x)\succeq y,$$
$$\forall\, x_1,x_2\in S \ \ x_1\prec x_2 \ \ \Rightarrow \ \ \Upsilon(x_1,x_2)\preceq y.$$

Т е о р е м а 1 [7]. *Пусть существует такой элемент* $u_0\in X$, *что* $\Upsilon(u_0,u_0)\succeq y$, *и выполнены условия:*

(1.1) *при любом* $x\in\mathrm{O}_X(u_0)$ *отображение* $\Upsilon(\cdot,x):X\to Y$ *упорядоченно накрывает множество* $W\doteq\{y\}$;

(1.2) *при любом* $x\in\mathrm{O}_X(u_0)$ *отображение* $\Upsilon(x,\cdot):X\to Y$ *является антитонным на множестве* $[x,u_0]_X$;

(1.3) *любая цепь* $S\in\mathcal{S}\big(\Upsilon,\mathrm{O}_X(u_0),y\big)$ *ограничена снизу, и существует нижняя граница* $\omega\in X$, *удовлетворяющая неравенству* $\Upsilon(\omega,\omega)\succeq y$.

Тогда множество решений уравнения (1) не пусто, и в нем существует минимальный элемент, который принадлежит $\mathrm{O}_X(u_0)$.

В теореме 1 утверждается, что в множестве решений уравнения (1) есть минимальный, но не наименьший элемент; в [7] приведен пример, подтверждающий, что предположений этого утверждения недостаточно для существования наименьшего решения, и доказано

С л е д с т в и е 1. *Пусть выполнены предположения теоремы 1 и, кроме того, для любых* $x_1,x_2\in\mathrm{O}_X(u_0)$, *справедливо*

(1.4) *если* $f(x_1)=f(x_2)=y$, *то существует элемент* $x\in X$, *удовлетворяющий неравенствам* $x\preceq x_1$, $x\preceq x_2$, $f(x)\succeq y$.

Тогда в множестве принадлежащих $O_X(u_0)$ *решений уравнения (1) существует наименьший элемент.*

2. Условия упорядоченного накрывания оператора Немыцкого. Предлагаемое здесь утверждение устанавливает связь между упорядоченным накрыванием оператора Немыцкого и порождающей его функции. Этот результат позволит далее применить теорему 1 и ее следствия к исследованию функциональных уравнений.

Для измеримого многозначного отображения $I:[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ обозначим через $L_p(I)$ пространство суммируемых в p-ой степени, $1\le p\le\infty$, функций (при $p=\infty$ существенно ограниченных функций), являющихся селекторами многозначного отображения I. В частности, "стандартное" пространство суммируемых в p-ой степени функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ обозначаем символом $L_p(\mathbb{R}^n)$. В пространстве $L_p(I)$ определим порядок: для $x,u\in L_p(I)$ считаем выполненным неравенство $x\le u$, если $x(t)\le u(t)$ при п.в. (почти всех) $t\in[a,b]$. Таким же образом упорядочим множество $Z(\mathbb{R}^m)$ измеримых функций $z:[a,b]\to\mathbb{R}^m$.

Пусть функция $f:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ удовлетворяет условиям Каратеодори (т. е. по первому аргументу измерима, а по второму непрерывна). Эти предположения позволяют определить действующий в пространствах измеримых функций оператор Немыцкого (оператор суперпозиции)

$$(N_f x)(t)=f\big(t,x(t)\big),\quad t\in[a,b]. \tag{2}$$

Далее, пусть заданы измеримые функции $v_0:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $y:[a,b]\to\mathbb{R}^m$. Положим

$$I_0:[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^n,\quad I_0(t)\doteq\{\,x\in\mathbb{R}^n:\,x\ge v_0(t)\}\ \dot{\forall} t\in[a,b]$$

(здесь и везде ниже символ $\dot{\forall}$ означает "при почти всех"). Обозначим через f_0 сужение функции f на множество $D_0\doteq\{\,(t,x):\ t\in[a,b],\ x\in I_0(t)\,\}$ и определим соответствующий оператор Немыцкого

$$(N_{f_0}x)(t)=f\big(t,x(t)\big),\ t\in[a,b]. \tag{3}$$

Т е о р е м а 2. *Пусть* $v_0\in L_p(\mathbb{R}^n)$, $\infty\le p\le 1$. *Если при п.в.* $t\in[a,b]$ *функция* $f_0(t,\cdot):I_0(t)\to\mathbb{R}^m$ *упорядоченно накрывает одноточечное множество* $W(t)\doteq\{y(t)\}\subset\mathbb{R}^m$, *то определенный равенством (3) оператор Немыцкого, как действующий из* $L_p(I_0)$ *в* $Z(\mathbb{R}^m)$, *является упорядоченно накрывающим множество* $W(\cdot)\doteq\{y(\cdot)\}\subset Z(\mathbb{R}^m)$.

В связи с приведенным утверждением, отметим, что заданный соотношением (2) оператор $N_f:L_p(\mathbb{R}^n)\to Z(\mathbb{R}^m)$ может не быть упорядоченно накрывающим множество $W(\cdot)\doteq\{y(\cdot)\}\subset$ $\subset Z(\mathbb{R}^m)$, если функция $f(t,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ упорядоченно накрывает множество $W(t)\doteq\{y(t)\}\subset$ $\subset\mathbb{R}^m$. Приведем соответствующий

П р и м е р 1. Определим функции $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t,x)=tx$; $y:[0,1]\to\mathbb{R}$, $y(t)=$ $=-1$. При любом t функция $f(t,\cdot)$ упорядоченно накрывает множество $W(t)\doteq\{-1\}\subset\mathbb{R}$, однако, соответствующий оператор Немыцкого $N_f:L_p(\mathbb{R})\to Z(\mathbb{R})$ свойством накрывания множества $W(\cdot)\doteq\{y(\cdot)\}\subset Z(\mathbb{R})$ не обладает ни при каком $p\ge 1$. Действительно, для функции $u(t)=0$ выполнено $(N_f u)(t)=0>-1$, и существует единственное решение $x(t)=-t^{-1}$ уравнения $(N_f u)(t)=-1$, которое, хотя и удовлетворяет неравенству $x(t)\le u(t)$, но не является элементом $L_p(\mathbb{R})$.

3. Функциональные неравенства. Здесь на основании теорем 1,2 получены утверждения о существовании и оценке решения функционального уравнения с отклоняющимся аргументом.

Пусть заданы функции $g:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ и $h:[a,b]\to[a,b]$. Рассмотрим уравнение

$$g\big(t,x\big(h(t)\big),x(t)\big)=0,\quad t\in[a,b]. \tag{4}$$

Решением уравнения (4) считаем функцию $x\in L_p(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую этому уравнению при п.в. $t\in[a,b]$.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия:*

(3.1) *при любых* $x,u\in\mathbb{R}^n$ *функция* $g(\cdot,x,u):[a,b]\to\mathbb{R}^m$ *измерима;*

(3.2) *при п.в.* $t\in[a,b]$ *и любых* $u\in\mathbb{R}^n$ *функция* $g(t,\cdot,u):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *по каждому аргументу* $x_1,\dots,x_n$ *не возрастает и непрерывна справа;*

(3.3) *при п.в.* $t \in [a,b]$ *и любых* $x \in \mathbb{R}^n$ *функция* $g(t,x,\cdot):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *непрерывна;*

(3.4) *существует функция* $v_0 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *такая, что при п.в.* $t \in [a,b]$ *для любого* $x \in \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющего неравенству* $x \geq v_0\big(h(t)\big)$, *сужение* $g_0(t,x,\cdot): I_0(t) \to \mathbb{R}^m$ *функции* $g(t,x,\cdot):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *на множество* $I_0(t) \doteq \{\, u \in \mathbb{R}^n : u \geq v_0(t)\}$ *упорядоченно накрывает одноточечное множество* $W(t) \doteq \{y(t)\} \subset \mathbb{R}^m$;

(3.5) *существует функция* $u_0 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *такая, что*

$$u_o(t) \geq v_0(t), \quad f\big(t, u_0\big(h(t)\big), u_0(t)\big) \geq 0 \quad \dot{\forall} t \in [a,b].$$

Тогда существует решение $x \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *уравнения (4), удовлетворяющее неравенству*

$$v_0(t) \leq x(t) \leq u_0(t) \quad \dot{\forall} t \in [a,b];$$

в множестве таких решений существует наименьший элемент.

Доказательство разрешимости уравнения (4) основано на его представлении в виде (1) с отображением

$$F(x) \doteq \Upsilon(x,x), \quad (\Upsilon(x,u))(t) \doteq f\big(t, x\big(h(t)\big), u(t)\big),$$

где $\Upsilon: L_p(\mathbb{R}^n) \times L_p(\mathbb{R}^n) \to Z(\mathbb{R}^m)$ удовлетворяет предположениям теоремы 1 (проверка условия (1.1) основана на теореме 2, применяемой к оператору Немыцкого, порожденному сужением на множество $D_0 \doteq \{\, (t,u):\ t \in [a,b],\ u \in I_0(t)\,\}$ функции $f(t,u) \doteq g\big(t, x\big(h(t)\big), u\big)$ (см. условие (3.4) данной теоремы). Для доказательства существования наименьшего решения необходимо воспользоваться следствием 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чаплыгин С.А.* Основания нового способа приближённого интегрирования дифференциальных уравнений. М., 1919 (Собрание сочинений I. Гостехиздат, 1948. С. 348–368).

2. Избранные труды Н.В. Азбелева / отв. ред. В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. М. Ижевск: Ин-т компьютер. исслед. 2012. 808 с.

3. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33. DOI: 10.1016/j.topol.2014.08.013

4. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. V. 201. P. 330–343. DOI: 10.1016/j.topol.2015.12.044

5. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 5. С. 475–478.

6. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады академии наук. 2013. Т. 453. № 6. С. 595–598.

7. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1605–1621.

8. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 448 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 15-11-10021) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00877).

Поступила в редакцию 21 октября 2016 г.

Жуковская Татьяна Владимировна, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: t_ zhukovskaia@mail.ru

Забродский Илья Алексеевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: ilyatmb@ya.ru

Серова Ирина Дмитриевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, студент, институт математики, естествознания и информационных технологий, e-mail: zh-imfi.tsu@yandex.ru

UDC 517.988.6, 517.965
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1963-1968

ON FUNCTIONAL INEQUALITIES

© **T. V. Zhukovskaya** [1], **I. A. Zabrodskiy** [2], **I. D. Serova** [2]

[1] Tambov State Technical University
106 Sovetskaya St, Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
[2] Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: zh-imfi.tsu@yandex.ru

The functional equation of the type $g(t,x(h(t)),x(t))=0$ with respect to a measurable essentially bounded function $x(t)$, $t\in[a,b]$, is considered. The conditions which guarantee that the inequality $g(t,u(h(t)),u(t))\geq 0$, $t\in[a,b]$, satisfied for some essentially bounded function $u(t)$, $t\in[a,b]$ implies $x(t)\leq u(t)$ are derived. The results due to E.S. Zhukovskiy on antitone disturbances of ordered covering mappings are used.
Key words: functional equations and inequalities; covering mappings; vector space with a metric

REFERENCES

1. *Chaplygin S.A.* Osnovaniya novogo sposoba priblizhyonnogo integrirovaniya differencial'nyh uravnenij. M., 1919 (Sobranie sochinenij I. Gostekhizdat, 1948. S. 348–368).
2. Izbrannye trudy N.V. Azbeleva / otv. red. V.P. Maksimov, L.F. Rahmatullina. M. Izhevsk: In-t komp'yuter. issled., 2012. 808 s.
3. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33. DOI: 10.1016/j.topol.2014.08.013
4. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. V. 201. P. 330–343. DOI: 10.1016/j.topol.2015.12.044
5. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* O tochkah sovpadeniya otobrazhenij v chastichno uporyadochennyh prostranstvah // Doklady Akademii nauk. 2013. T. 453. № 5. S. 475–478.
6. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Tochki sovpadeniya mnogoznachnyh otobrazhenij v chastichno uporyadochennyh prostranstvah // Doklady akademii nauk. 2013. T. 453. № 6. S. 595–598.
7. *Zhukovskiy E.S.* Ob uporyadochenno nakryvayushchih otobrazheniyah i neyavnyh differencial'nyh neravenstvah // Differencial'nye uravneniya. 2016. T. 52. № 12. S. 1605–1621.
8. *Kollatc L.* Funkcional'nyj analiz i vychislitel'naya matematika. M.: Mir, 1969. 448 s.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Sciences Fund (project № 15-11-10021) and the Russian Fund for Basic Research (project № 14-01-00877).

Received 21 October 2016

Zhukovskaia Tatyana Vladimirovna, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor of High Mathematics Department, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Zabrodskiy Il'ya Alekseevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate student of the Functional Analysis Department, e-mail: ilyatmb@ya.ru

Serova Irina Dmitrievna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, student of the Institute Mathematic, Natural Sciences and Information Technologies, e-mail: zh-imfi.tsu@yandex.ru

Информация для цитирования:

Жуковская Т.В., Забродский И.А., Серова И.Д. О функциональных неравенствах // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 1963-1968.
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1963-1968

Zhukovskaya T.V., Zabrodskiy I.A., Serova I.D. O funkcional'nyh neravenstvah [On functional inequalities]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 1963-1968. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1963-1968 (In Russian)